# CURS DE ANALIZĂ MATEMATICĂ 2

TANIA-LUMINIŢA COSTACHE

2

*

# Prefaţă

Lucrarea este recomandată studenţilor anilor întâi ai Facultăţii de Electronică , Telecomunicaţii şi Tehnologia Informaţiei din Universitatea Politehnică Bucureşti.

Cartea este structurată în unsprezece capitole conţinând o parte teoretică în care sunt prezentate noţiunile fundamentale şi demonstrate principalele rezultate conform programei cursului de Analiză Matematică 2, precum şi numeroase exemple ce ajută la o fixare mai bună a cunoştinţelor.

4

*

# Cuprins

**Prefaţă** **3**

**1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi** **9**
1.1 Ecuaţii cu variabile separabile . . . . . 10
1.2 Ecuaţii diferenţiale omogene . . . . . 11
1.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi . . . . . 13
1.4 Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi . . . . . 16
1.4.1 Ecuaţii Bernoulli . . . . . 16
1.4.2 Ecuaţii Riccati . . . . . 17
1.5 Ecuaţii cu diferenţială exactă . Factor integrant . . . . . 18
1.6 Ecuaţii diferenţiale pentru care soluţiile sunt date parametric 21
1.6.1 Ecuaţii Lagrange . . . . . 21
1.6.2 Ecuaţii Clairaut . . . . . 22
1.6.3 Ecuaţii de forma $x = f(y')$, $f \in \mathcal{C}^1$ . . . . . 24
1.6.4 Ecuaţii de forma $y = f(y')$, $f \in \mathcal{C}^1$ . . . . . 24
1.6.5 Ecuaţii de forma $y = f(x, y')$, $f \in \mathcal{C}^1$ . . . . . 25
1.6.6 Ecuaţii de forma $x = f(y, y')$, $f \in \mathcal{C}^1$ . . . . . 25

**2 Sisteme de ecuaţii diferenţiale** **27**
2.1 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili . . . . . 28
2.2 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi . . . . . 32
2.3 Stabilitatea soluţiilor sistemelor diferenţiale . . . . . 37

**3 Ecuaţii diferenţiale de ordin superior** **40**
3.1 Ecuaţii diferenţiale de ordin $n$ rezolvabile prin cuadraturi . . 41
3.1.1 Ecuaţii de forma $y^{(n)} = f(x)$, $f \in \mathcal{C}^0(I)$, $n > 1$ . . . 41
3.1.2 Ecuaţii de forma $f(x, y^{(n)}) = 0$ . . . . . 42
3.1.3 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ . . . . 42
3.1.4 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ . . . . 43
3.1.5 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ . . 44
3.1.6 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (ce nu conţin pe $y$) . . . . . 45

3.1.7 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (ce nu conţin pe $x$) . . . . . 45
3.1.8 Ecuaţii de forma $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, omogene în $y, y', \ldots, y^{(n)}$ . . . . . 46
3.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul $n$ . . . . . 47
3.2.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul $n$ cu coeficienţi variabili . . . . . 47
3.2.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul $n$ cu coeficienţi constanţi . . . . . 52
3.3 Aplicaţii . . . . . 60
3.3.1 Ecuaţii Euler . . . . . 60
3.3.2 Metoda eliminării pentru sisteme diferenţiale liniare . 61

**4 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi 64**
4.1 Integrale prime pentru sisteme diferenţiale . . . . . 64
4.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi . . . . . 66

**5 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi 72**
5.1 Clasificarea si aducerea la forma canonică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul doi . . . . . 72
5.2 Problema lui Cauchy asupra coardei infinite. Metoda de rezolvare a lui d'Alembert . . . . . 77
5.3 Problema lui Cauchy asupra coardei finite. Metoda separării variabilelor . . . . . 80
5.4 Rezolvarea problemei Dirichlet pentru discul unitate . . . . . 88
5.5 Rezolvarea problemei lui Neumann pentru disc . . . . . 91
5.6 Ecuaţia căldurii . . . . . 92

**6 Funcţii complexe 104**
6.1 Funcţii olomorfe. Condiţiile Cauchy-Riemann. Funcţii elementare . . . . . 104
6.2 Integrala complexă . Teorema lui Cauchy. Formula integrala Cauchy . . . . . 116
6.3 Funcţii analitice complexe. Dezvoltări în serie Laurent . . . . 121
6.4 Puncte singulare. Reziduuri. Teorema reziduurilor . . . . . 127
6.5 Calculul unor integrale reale folosind teorema reziduurilor . . 134

**7 Serii Fourier. Integrala Fourier 139**
7.1 Serii Fourier . . . . . 139
7.2 Integrala Fourier . . . . . 160

**8 Transformarea Fourier 164**
8.1 Transformarea Fourier a funcţiilor integrabile pe $\mathbb{R}$ . . . . . 164
8.2 Proprietăţile transformării Fourier . . . . . 165

8.3 Distribuţii . . . . . 169
8.4 Transformarea Fourier a distribuţiilor . . . . . 175

**9 Transformata Laplace** **178**
9.1 Definiţie şi formule de inversare . . . . . 178
9.2 Proprietăţiile transformării Laplace . . . . . 181

**10 Transformarea Z** **189**

**11 Funcţii speciale** **195**
11.1 Polinoame ortogonale . . . . . 195
11.1.1 Funcţii şi polinoame ortogonale . . . . . 195
11.1.2 Polinoamele lui Legendre . . . . . 196
11.1.3 Polinoamele lui Cebîşev . . . . . 202
11.1.4 Polinoamele lui Hermite . . . . . 204
11.2 Funcţiile lui Bessel . . . . . 205
11.2.1 Ecuaţia lui Bessel. Funcţiile lui Bessel de prima speţă şi de speţa a doua . . . . . 205
11.2.2 Relaţii de recurenţă . . . . . 213
11.2.3 Reprezentări integrale . . . . . 215
11.2.4 Funcţiile lui Bessel modificate . . . . . 218

**Bibliografie** **224**

*

# Capitolul 1

# Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

**Definiţia 1.1.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu (o mulţime deschisă şi conexă ). Ecuaţia diferenţială scrisă sub **forma normală** definită în $D$ este

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathcal{C}^0(D).$$

**Definiţia 1.2. Soluţie** a acestei ecuaţii pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ este o funcţie $g \in \mathcal{C}^1(I)$ astfel încât $g'(x) = f(x, g(x)), \quad x \in I$.

Curba din $\mathbb{R}^2$ definită prin ecuaţia $y = g(x)$ se numeşte **curbă integrală** a ecuaţiei date, iar graficul ei se mai numeşte **traiectorie** (sau **orbită** ).

Teoria ecuaţiilor diferenţiale se ocupă cu găsirea soluţiilor acestora, precum şi cu studiul proprietăţilor acestor soluţii; procesul prin care se deduc soluţiile unei ecuaţii diferenţiale se numeşte **integrare**.

**Definiţia 1.3. Soluţia generală** a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x, y)$ este o soluţie ce depinde de un parametru real arbitrar $c \in I_c \subset \mathbb{R}$, $I_c$ fiind un interval sau o mulţime oarecare. Soluţia generală se va putea scrie sub una din formele :

$$y = g(x, c), \quad x = h(y, c), \quad G(x, y, c) = 0.$$

**Definiţia 1.4. Soluţia particulară** a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x, y)$ este orice soluţie obţinută din soluţia ei generală $G(x, y, c) = 0$, dând lui $c$ o valoare oarecare din $I_c$, iar dacă o soluţie a ecuaţiei diferenţiale în cauză nu se poate obţine prin particularizarea lui $c$ din soluţia generală , atunci această soluţie se va numi **singulară** .

In aplicaţii se cer uneori soluţii care trebuie să verifice anumite condiţii suplimentare. Prin rezolvarea **problemei Cauchy** $y(x_0) = y_0, \ (x_0, y_0) \in D$ pentru ecuaţia diferenţială $y' = f(x, y), \ f \in \mathcal{C}^0(D)$ se înţelege determinarea soluţiei $y = g(x)$ cu proprietatea $g(x_0) = y_0$. Din punct de vedere geometric aceasta revine la determinarea traiectoriei ecuaţiei date care trece prin punctul $(x_0, y_0)$.

**Definiţia 1.5.** Dacă soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x, y)$ se poate calcula cu ajutorul primitivelor funcţiilor elementare, atunci această ecuaţie diferenţială se numeşte **integrabilă prin cvadraturi**.

## 1.1 Ecuaţii cu variabile separabile

**Definiţia 1.6.** Se numeşte **ecuaţie diferenţială cu variabile separabile** o ecuaţie de forma

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.1}$$

sau

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0, \tag{1.2}$$

unde funcţiile $f, g, X, X_1, Y, Y_1$ sunt date , iar funcţia necunoscută este $y$ de clasă $\mathcal{C}^1$.

Pentru valori ale lui $y$ pentru care $g(y) \neq 0$, ecuaţia cu variabile separabile poate fi scrisă astfel

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Integrând ambii membri ai acestei egalităţi se obţine

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

care este o familie de curbe ce depinde de constanta arbitrară $c$, familie ce se numeşte **soluţia generală** a ecuaţiei (1.1).

Analog la ecuaţia (1.2) în domeniul în care $X_1(x)Y(y) \neq 0$, integrând termen cu termen se obţine

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

ceea reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (1.2).

Dacă pentru o valoare $y = y_0$ avem $g(y_0) = 0$, atunci funcţia constantă $y = y_0$ este o soluţie a ecuaţiei (1.1), fapt ce se poate verifica direct în ecuaţia (1.1). De asemenea, dacă $a$ este o rădăcină a ecuaţiei $X_1(x) = 0$ şi $b$ a ecuaţiei $Y_1(y) = 0$, atunci dreptele $x = a$, $y = b$ sunt curbe integrale ale ecuaţiei (1.2). Aceste soluţii se numesc **soluţii singulare** ale ecuaţiei cu variabile separabile.

**Observaţia 1.1.** Ecuaţia diferenţială de forma $y' = f(ax+by+c), a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile prin substituţia $u = ax + by + c$.

**Exemplul 1.1.** $(1 + y^2) + xyy' = 0, \;\; x_0 = 1, \;\; y_0 = 0$

*Demonstraţie.* Impărţind cu $x(1+y^2)$, în ipoteza $x \neq 0$, găsim $\frac{dx}{x}+\frac{ydy}{1+y^2}=0$. De aici rezultă soluţia generală

$$2\ln|x|+\ln(1+y^2)=c_1 \quad \text{sau} \quad x^2(1+y^2)=c, \quad c>0.$$

Scriind că $x_0=1,\ y_0=0$ verifică soluţia generală , deducem $c=1$ şi soluţia problemei Cauchy este $x^2(1+y^2)=1$. □

**Exemplul 1.2.** $y'=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2+2}-\frac{1}{x(y^2+2)}$

*Demonstraţie.* Grupăm termenii convenabil şi scriem $y'=(1+\frac{1}{x})\frac{y^2+1}{y^2+2}$. Rezultă $\frac{y^2+1}{y^2+2}dy=(1+\frac{1}{x})dx$. Prin integrare obţinem soluţia generală

$$y+\operatorname{arctg} y=\ln|x|+x+c.$$

□

## 1.2 Ecuaţii diferenţiale omogene

**Definiţia 1.7.** Ecuaţia diferenţială

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

$P,Q\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fiind date se numeşte **omogenă** dacă funcţiile $P$ şi $Q$ sunt funcţii omogene de acelaşi grad de omogenitate.

O ecuaţie diferenţială omogenă poate fi scrisă întotdeauna sub forma

$$y'=f(\frac{y}{x}),\ \ x\neq 0. \tag{1.3}$$

Prin substituţia $z(x)=\frac{y(x)}{x}$, unde $z(x)$ este noua funcţie necunoscută , ecuaţia (1.3) se reduce la următoarea ecuaţie cu variabile separabile :

$$xz'=f(z)-z$$

care se va rezolva ca în Secţiunea 1.1.

**Observaţia 1.2.** Ecuaţia diferenţială

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), a,b,c,a_1,b_1,c_1\in\mathbb{R}$$

se poate transforma printr-o schimbare de variabilă într-o ecuaţie omogenă

1) Dacă $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$, facem schimbarea de variabile $x=u+x_0,\ \ y=v+y_0$, unde $ax_0+by_0+c=0,\ \ a_1x_0+b_1y_0+c_1=0$.

2) Dacă $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, facem schimbarea de funcţie $u(x)=a_1x+b_1y(x)$, $u(x)$ fiind noua funcţie necunoscută .

Unele ecuaţii diferenţiale neomogene devin omogene dacă facem substituţiile $x=u^r,\ \ y=v^s$ cu $r$ şi $s$ convenabil aleşi.

**Exemplul 1.3.** $y'=\frac{y^2+x^2}{xy},\ \ x_0=-1,\ \ y_0=0$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ şi obţinem $z'x + z = \frac{1}{z} + z$. Rezultă $\frac{dz}{dx}x = \frac{1}{z}$. Separând obţinem $zdz = \frac{dx}{x}$. Deci $z^2 = 2\ln|x| + c$, respectiv $y^2 = 2x^2 \ln|x| + cx^2$.

Pentru condiţiile iniţiale găsim $c = 0$. Deci soluţia problemei Cauchy este $y^2 = 2x^2 \ln|x|$. □

**Exemplul 1.4.** $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

*Demonstraţie.* Cu schimbarea de funcţie $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ obţinem

$$z + (2\sqrt{z} - 1)(z'x + z) = 0.$$

Desfacem parantezele şi împărţim prin $z$ şi ecuaţia devine

$$\frac{dz}{dx}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{1}{x}.$$

Separând variabilele obţinem $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}\right)dz = -\frac{dx}{x}$. Deci

$$\ln|z| + \frac{1}{\sqrt{z}} = -\ln|x| + c.$$

Aşadar, $\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \sqrt{\frac{x}{y}} = -\ln|x| + c$ echivalent cu $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = c$, $\frac{x}{y} \geq 0$. □

**Exemplul 1.5.** $(3x - 7y - 3)y' + 7x - 3y - 7 = 0$

*Demonstraţie.* Dreptele de ecuaţii $3x - 7y - 3 = 0$ şi $7x - 3y - 7 = 0$ sunt concurente în punctul $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Facem translaţia $x = u + 1$, $y = v$ şi ecuaţia diferenţială devine $(3u - 7v)v' + 7u - 3v = 0$. Noua ecuaţie este omogenă şi facem schimbarea de funcţie $z(u) = \frac{v(u)}{u}$ obţinând o ecuaţie cu variabile separabile a cărei soluţie generală este $(z-1)^2(z+1)^5u^7 = c$ echivalent cu $(v-u)^2(v+u)^5 = c$ sau $(y-x-1)^2(y+x-1)^5 = c$.

Rădăcinilor $z = 1$ şi $z = -1$ ale funcţiei $f(z) - z$ le corespund soluţiile particulare $y = x - 1$ şi $y = -x + 1$. □

**Exemplul 1.6.** $(3x + 3y - 1)dx + (x + y + 1)dy = 0$

*Demonstraţie.* Dreptele $3x+3y-1 = 0$ şi $x+y+1 = 0$ sunt paralele. Facem schimbarea de funcţie $x + y = u(x)$ şi ecuaţia diferenţială devine

$$2dx + du + 2\frac{du}{u - 1} = 0.$$

Soluţia ei generală este $2x + u + 2\ln|u - 1| = c_1$, respectiv

$$3x + y + \ln(x + y - 1)^2 = c_1$$

sau $(x+y-1)^2 = ce^{-(3x+y)}$.

Să vedem dacă prin separarea variabilelor nu am pierdut soluţii. Factorul cu care am împărţit, egalat cu 0, $u-1=0$, ne dă soluţia particulară $y=1-x$ ($c=0$); deci nu s-au pierdut soluţii. □

**Exemplul 1.7.** $x - y^2 + 2xyy' = 0$

*Demonstraţie.* Transformăm ecuaţia diferenţială dată punând $x = u^r$, $y = v^s$. Obţinem

$$u^r - v^{2s} + 2u^r \frac{sv^{2s-1}}{ru^{r-1}} v' = 0.$$

Ea va fi omogenă dacă putem determina numerele $r$ şi $s$ astfel încât să avem $r = 2s = r + 2s - 1 - r + 1$. Astfel putem lua $r = 1$, $s = \frac{1}{2}$. Deci dacă luăm $x = u$, $y = v^{\frac{1}{2}}$, ecuaţia diferenţială dată se transformă în ecuaţia omogenă $v' = \frac{v-u}{u}$. Se va obţine soluţia generală $y^2 = x(c - \ln|x|)$. □

## 1.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

**Definiţia 1.8.** Se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi** o ecuaţie de forma

$$y' = p(x)y + q(x), \;\; p, q \in \mathcal{C}^0(I), \;\; I \subset \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Dacă funcţia $q(x) \neq 0$, ecuaţia (1.4) se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de ordinul întâi**.

Dacă funcţia $q(x) \equiv 0$, ecuaţia $y' = p(x)y$ se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul întâi**.

In acest caz variabilele se separă şi soluţia generală e ecuaţiei liniare omogene este

$$\overline{y}(x) = ce^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}.$$

Soluţia generală $y(x)$ a ecuaţiei neomogene (1.4) este egală cu soluţia generală $\overline{y}(x)$ a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene plus o soluţie particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei diferenţiale neomogene (1.4):

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_p(x).$$

Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei liniare neomogene (1.4) se foloseşte **metoda variaţiei constantelor** sau **metoda lui Lagrange** ce constă în următoarele: se caută o soluţie a ecuaţiei neomogene sub forma

$$y_p(x) = c(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds},$$

funcţia $c(x)$ fiind necunoscută . Derivând şi înlocuind în ecuaţia liniară neomogenă (1.4) se obţine

$$c'(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + c(x)p(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} = p(x)c(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + q(x)$$

şi rezultă $c'(x) = q(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$. Deci $c(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}dt$. Adică soluţia particulară este

$$y_p(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}dt\right)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}.$$

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei (1.4) este

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left(c + \int_{x_0}^{x} q(t)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}dt\right).$$

**Exemplul 1.8.** $y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ \ x_0 = 0,\ \ y_0 = 1$

*Demonstraţie.* Ataşăm ecuaţia liniară omogenă $y' + y\cos x = 0$. Separăm varabilele şi obţinem $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$, adică $-\frac{dy}{y} = \cos x dx$. Soluţia generală este $\overline{y}(x) = c\mathrm{e}^{-\sin x}$.

Luăm $y_p(x) = c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}$ şi punem condiţia ca $y_p$ să verifice ecuaţia diferenţială neomogenă şi obţinem

$$c'(x)\mathrm{e}^{-\sin x} + c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}(-\cos x) + c(x)\mathrm{e}^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x.$$

Rezultă $c'(x) = \sin x\cos x\mathrm{e}^{\sin x}$. Deci prin integrare obţinem

$$c(x) = \mathrm{e}^{\sin x}(\sin x - 1).$$

Aşadar $y_p(x) = \sin x - 1$ şi soluţia generală este $y(x) = \sin x - 1 + c\mathrm{e}^{-\sin x}$.

Scriem că $x_0 = 0,\ \ y_0 = 1$ verifică ecuaţia dată şi obţinem $c = 2$. Deci soluţia problemei Cauchy este $y(x) = \sin x - 1 + 2\mathrm{e}^{-\sin x}$. □

**Exemplul 1.9.** $y' + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

*Demonstraţie.* Ecuaţia omogenă asociată este $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

Rezultă $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$ şi are soluţia generală $\overline{y}(x) = c\cdot\arcsin x$.

O soluţie particulară a ecuaţiei liniare neomogene o aflăm prin metoda variaţiei constantelor. Considerăm soluţia particulară de forma

$$y_p(x) = c(x)\arcsin x.$$

Obţinem $c'(x)\arcsin x + c(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{c(x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

Rezultă $c'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, deci $c(x) = -\arcsin x$ şi soluţia particulară este $y_p(x) = -\arcsin^2 x$.

Soluţia generală este $y(x) = -(\arcsin x - c)\arcsin x$. □

**Exemplul 1.10.** $y^2dx + (x - 2xy - y^2)dy = 0$

*Demonstraţie.* Luăm pe $y$ drept variabilă independentă şi obţinem ecuaţia liniară pentru funcţia necunoscută $x(y)$:

$$x' + \frac{(1-2y)x}{y^2} = 1.$$

Ecuaţia omogenă ataşată este $x' + \frac{(1-2y)x}{y^2} = 0$ şi soluţia sa generală este $\overline{x}(y) = c\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}y^2$.

Observăm că o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene este $x_p(y) = y^2$. Soluţia generală a ecuaţiei date va fi

$$x(y) = \overline{x}(y) + x_p(y) = c\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}y^2 + y^2.$$

□

**Exemplul 1.11.** $y' = 1 + \mathrm{e}^{x+2y}$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de funcţie $z(x) = \mathrm{e}^{-(x+2y)}$ şi obţinem

$$y' = -\frac{z'}{2z} - \frac{1}{2},$$

respectiv ecuaţia diferenţială $z' + 3z = -2$.

Soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate este $\overline{z}(x) = c\mathrm{e}^{-3x}$ şi o soluţie particulară a ecuaţiei liniare neomogene este $z_p(x) = -\frac{2}{3}$. Atunci soluţia generală este $z(x) = c\mathrm{e}^{-3x} - \frac{2}{3}$, adică $\mathrm{e}^{-(x+2y)} = c\mathrm{e}^{-3x} - \frac{2}{3}$, de unde se poate scoate $y$. □

**Exemplul 1.12.** $y^2(y'-1) = (2-y')^2$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de funcţie

$$2 - y'(x) = y(x)t(x), \tag{1.5}$$

$t(x)$ fiind noua funcţie necunoscută .

Ecuaţia dată devine

$$y = \frac{1}{t} - t \tag{1.6}$$

Calculând din (1.6) pe $y'$ şi înlocuind în (1.5), atât pe $y$ cât şi pe $y'$, obţinem ecuaţia diferenţială în $t$ :

$$\frac{t'}{t^2} = -1.$$

Soluţia generală este

$$t(x) = \frac{1}{x+c} \tag{1.7}$$

Având în vedere (1.7) şi (1.6), soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date se scrie $y(x) = x + c - \frac{1}{x+c}$. □

**Exemplul 1.13.** $xy' + y = \frac{1}{xy^2}$

*Demonstraţie.* Impărţind cu $x$, multiplicând cu $3y^2$ şi notând $y^3 = Y(x)$, obţinem

$$Y' + 3\frac{Y}{x} = \frac{3}{x^2} \tag{1.8}$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (1.8) este $\overline{Y}(x) = \frac{c}{x^3}$. Pentru determinarea unei soluţii particulare folosim metoda lui Lagrange şi găsim $Y_p(x) = \frac{3}{2x}$. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.8) va fi $Y(x) = \frac{c}{x^3} + \frac{3}{2x}$, adică $y^3 = \frac{c}{x^3} + \frac{3}{2x}$. □

## 1.4 Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

### 1.4.1 Ecuaţii Bernoulli

**Definiţia 1.9.** O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \ \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \ \text{ unde } \ p, q \in \mathcal{C}^0(I)$$

sunt funcţii date se numeşte **ecuaţie diferenţială Bernoulli**.

Prin substituţia $z = y^{1-\alpha}$, ecuaţia Bernoulli se reduce la următoarea ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta z :

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

**Exemplul 1.14.** $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}, \ \ y \geq 0, \ \ x \neq 0$

*Demonstraţie.* $\alpha = \frac{1}{2}$ şi facem schimbarea $z(x) = y^{\frac{1}{2}}$. Obţinem ecuaţia liniară $z' - 2\frac{z}{x} = \frac{x}{2}$ a cărei soluţie generală este $z(x) = cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x|$. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este $\sqrt{y} = cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x|$.

$y = 0$ este soluţia singulară . □

**Exemplul 1.15.** $xy' + y = -x^2y^2, \ \ x_0 = 1, \ \ y_0 = 1$

*Demonstraţie.* $\alpha = 2$ şi facem schimbarea $z(x) = \frac{1}{y}$. Obţinem ecuaţia liniară $z' - \frac{2}{x} = x$ cu soluţia generală $z(x) = cx + x^2$. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este $y(x) = \frac{1}{cx+x^2}$.

Scriem că $x_0 = 1, \ \ y_0 = 1$ verifică ecuaţia $1 = y(1) = \frac{1}{c\cdot 1 + 1^2}$ şi obţinem $c = 0$. Deci soluţia problemei Cauchy este $y = \frac{1}{x^2}$. □

**Exemplul 1.16.** $y' = \frac{2y^4}{x(x^2+2y^3)}$

*Demonstraţie.* Luând pe $x$ drept funcţie de $y$ obţinem ecuaţia Bernoulli cu $\alpha = 3$,

$$x' = \frac{x}{y} + \frac{x^3}{2y^4},$$

care prin schimbarea de funcţie $z(y) = x^{-2}$ se transformă în ecuaţia diferenţială liniară $z' + \frac{2z}{y} = -\frac{1}{y^4}$. Această ecuaţie are soluţia generală $z(y) = \frac{cy+1}{y^3}$. Deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este $y^3 = x^3(1 + cy)$. □

**Exemplul 1.17.** $y' = \frac{(1+y)^2}{(1+y)x-x^2}$

*Demonstraţie.* Scriem ecuaţia astfel :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{1+y} - \frac{x^2}{(1+y)^2}$$

şi rezultă o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$. Facem schimbarea de funcţie $z(y) = x^{-1}$ şi obţinem ecuaţia diferenţială liniară $z' + \frac{z}{1+y} = \frac{1}{(1+y)^2}$ cu soluţia generală $z(y) = \frac{1}{1+y}(\ln|1 + y| - c)$. De aici deducem că ecuaţia diferenţială dată va avea soluţia generală $1 + y = x \ln|1 + y| - cx$. □

### 1.4.2 Ecuaţii Riccati

**Definiţia 1.10.** O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \text{ unde } p, q, r \in \mathcal{C}^0(I)$$

sunt funcţii date, iar funcţia $y$ este necunoscută se numeşte **ecuaţie diferenţială Riccati**.

In general ecuaţia Riccati nu se poate integra prin cvadraturi.

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei, integrala sa generală se determină prin cvadraturi, cu schimbarea de funcţie

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}.$$

Introducând în ecuaţie avem

$$y_p' - \frac{z'}{z^2} = p(x)(y_p^2 + 2y_p \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}) + q(x)(y_p + \frac{1}{z}) + r(x).$$

Cum $y_p' = p(x)y_p^2 + q(x)y_p + r(x)$, rezultă că $z' = -(2p(x)y_p(x) + q(x))z - p(x)$, adică o ecuaţie liniară neomogenă .

**Exemplul 1.18.** $2(x - x^2\sqrt{x})y' + 2\sqrt{x}y^2 - y - x = 0, \ y_p(x) = x$

*Demonstraţie.* Facem substituţia $y(x) = x + \frac{1}{z(x)}$ şi găsim ecuaţia liniară

$$z' + \frac{1 - 4x\sqrt{x}}{2(x - x^2\sqrt{x})} z = \frac{\sqrt{x}}{x - x^2\sqrt{x}} \tag{1.9}$$

Facem schimbarea de variabilă independentă $x = t^2$; deoarece $dx = 2tdt$, dacă notăm $z(x(t)) = \eta(t)$, ecuaţia (1.9) devine

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{1 - 4t^3}{t - t^4}\eta = \frac{2t}{t - t^4}.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale liniare este $\eta(t) = (c + t^2)\frac{1}{t-t^4}$ sau $z(x) = \frac{c+x}{\sqrt{x}-x^2}$. Soluţia generală a ecuaţiei date va fi $y(x) = x + \frac{\sqrt{x}-x^2}{c+x}$. □

## 1.5 Ecuaţii cu diferenţială exactă . Factor integrant

**Definiţia 1.11.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu şi $P, Q\colon D \to \mathbb{R}$ continue. Se numeşte **formă diferenţială** expresia $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

**Definiţia 1.12.** Formă diferenţială $\omega$ se numeşte **exactă** pe $D$ dacă există o funcţie $U \in \mathcal{C}^1(D)$ cu proprietatea $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

**Definiţia 1.13.** Presupunem că ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$y' = f(x, y), \tag{1.10}$$

unde $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(D)$ are proprietatea ca pentru orice punct $(x, y) \in D$ avem $f(x, y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ cu $P, Q\colon D \to \mathbb{R}$ continue şi $Q \neq 0$ pe $D$.

Dacă forma diferenţială $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ este exactă pe $D$, ecuaţia diferenţială (1.10), adică $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ se numeşte **ecuaţie cu diferenţială exactă** .

**Teorema 1.1.** *Dacă ecuaţia diferenţială (1.10) este o ecuaţie cu diferenţială exactă , atunci o funcţie $y = \varphi(x)$ definită pe un interval oarecare este soluţie a ecuaţiei (1.10) dacă şi numai dacă verifică ecuaţia implicită $U(x, y) = c$, cu $c$ constantă reală oarecare.*

*Demonstraţie.* Fie $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.10), unde $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Atunci pentru orice $x \in I$ punctul $(x, \varphi(x)) \in D$ şi se verifică egalitatea

$$\varphi'(x) = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))},$$

care se poate scrie sub forma $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$ sau

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

Pentru orice $x \in I$ avem egalitatea $\frac{d}{dx}(U(x,\varphi(x))) = 0$, de unde rezultă că $U(x,\varphi(x)) = c,\ \forall x \in I$.

Reciproc, fie $y = \varphi(x)$, $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei implicite $U(x,y) = c$. Pentru orice $x \in I$ avem $(x,\varphi(x)) \in D$ şi $U(x,\varphi(x)) = c$, de unde derivând obţinem $\frac{\partial U}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$ sau $\varphi'(x) = -\frac{P(x,\varphi(x))}{Q(x,\varphi(x))} = f(x,\varphi(x))$, deci $y = \varphi(x)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.10). □

**Definiţia 1.14.** Forma diferenţială $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ cu $P, Q \in \mathcal{C}^1(D)$ se numeşte **închisă** dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $D$.

**Teorema 1.2.** *Presupunem că ecuaţia diferenţială (1.10) se scrie sub forma*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

*unde $P, Q \in \mathcal{C}^1(D)$ cu $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex şi $Q \neq 0$ pe $D$ astfel încât forma diferenţială $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ să fie o formă diferenţială închisă . Atunci orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.10) se obţine din ecuaţia implicită $U(x,y) = c$, unde*

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \quad cu\ (x_0,y_0) \in D\ fixat.$$

Uneori forma diferenţială $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ nu este închisă în $D$, dar prin înmulţire cu o funcţie $\mu(x,y)$, $\mu\colon D \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$, numită **factor integrant**, forma diferenţială

$$\mu\omega = \mu P dx + \mu Q dy$$

devine închisă şi se verifică ecuaţia $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$, numită **ecuaţia factorului integrant**.

Dacă

$$-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = g(x)$$

este o funcţie numai de variabilă $x$, atunci factorul integrant $\mu$ este o funcţie numai de $x$ şi se determină din ecuaţia diferenţială $\frac{d\mu}{\mu} = g(x)dx$.

Dacă

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = h(y)$$

este o funcţie numai de variabilă $y$, atunci factorul integrant $\mu$ este o funcţie numai de $y$ şi se determină din ecuaţia diferenţială $\frac{d\mu}{\mu} = h(y)dy$.

**Exemplul 1.19.** $(ye^{xy} - 4xy)dx + (xe^{xy} - 2x^2)dy = 0$

*Demonstraţie.* Avem $P(x,y) = ye^{xy} - 4xy$ şi $Q(x,y) = xe^{xy} - 2x^2$. Deci $\frac{\partial P}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} - 4x$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} - 4x$. Atunci forma diferenţială

$\omega = (ye^{xy} - 4xy)dx + (xe^{xy} - 2x^2)dy$ este închisă . Aşadar, conform Teoremei 1.2, soluţia ecuaţiei date este $U(x, y) = c$, unde

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} (y_0 e^{ty_0} - 4ty_0)dt + \int_{y_0}^{y} (xe^{xt} - 2x^2)dt = e^{xy} - 2x^2y - e^{x_0y_0} + 2x_0^2y_0$$

Deci soluţia este $e^{xy} - 2x^2y = c$. □

**Exemplul 1.20.** $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$

*Demonstraţie.* Avem $P(x, y) = x \sin y + y \cos y$ şi $Q(x, y) = x \cos y - y \sin y$. Atunci $\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y$. Cum

$$-\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{1}{x \cos y - y \sin y}(\cos y - x \cos y - \cos y + y \sin y) = 1,$$

se caută factorul integrant $\mu$ funcţie numai de $x$ din ecuaţia $\frac{d\mu}{\mu} = dx$. Deci $\ln \mu = x$ sau $\mu = e^x$.

Inmulţim ecuaţia iniţială cu $\mu = e^x$ şi obţinem ecuaţia cu diferenţială exactă :

$$e^x(x \sin y + y \cos y)dx + e^x(x \cos y - y \sin y)dy = 0$$

şi conform Teoremei 1.2,

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} e^t(t \sin y_0 + y_0 \cos y_0)dt + \int_{y_0}^{y} e^x(x \cos t - t \sin t)dt =$$

$$= e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) - e^{x_0}(x_0 \sin y_0 - \sin y_0 + y_0 \cos y_0)$$

Soluţia generală este $e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) = c$. □

**Exemplul 1.21.** $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x\operatorname{ctg} y dy = 0$

*Demonstraţie.* Avem $P(x, y) = 1 + 3x^2 \sin y$ şi $Q(x, y) = -x\operatorname{ctg} y$. Atunci $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \cos y$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\operatorname{ctg} y$. Cum

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{1 + 3x^2 \sin y}(-\operatorname{ctg} y - 3x^2 \cos y) = -\operatorname{ctg} y,$$

se caută factorul integrant $\mu$ funcţie numai de $y$ din ecuaţia $\frac{d\mu}{\mu} = -\operatorname{ctg} y dy$. Deci $\ln |\mu| = -\ln |\sin y|$ sau $\mu = \frac{1}{\sin y}$.

Inmulţim ecuaţia iniţială cu $\mu = \frac{1}{\sin y}$ şi obţinem ecuaţia cu diferenţială exactă este

$$\left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2\right)dx - x\frac{\cos y}{\sin^2 y}dy = 0$$

şi conform Teoremei 1.2,

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{\sin y_0} + 3t^2\right)dt - \int_{y_0}^{y} x\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{x}{\sin y} + x^3 - \left(\frac{x_0}{\sin y_0} + x_0^3\right).$$

Soluţia generală este $\frac{x}{\sin y} + x^3 = c$. □

## 1.6 Ecuaţii diferenţiale pentru care soluţiile sunt date parametric

### 1.6.1 Ecuaţii Lagrange

**Definiţia 1.15.** O ecuaţie diferenţială de forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1.11}$$

unde $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(I)$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ şi $\varphi \neq 1$ se numeşte **ecuaţie Lagrange**.

Ecuaţie Lagrange nu este o ecuaţie diferenţială de formă normală .

Pentru rezolvarea ei se derivează ecuaţia (1.11) şi se face substituţia $y' = p$. Rezultă

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p'.$$

Avem $p = p(x)$ şi inversăm local această funcţie, adică schimbăm rolul variabilelor $x = x(p)$. Atunci $p' = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}} = \frac{1}{x'}$ şi obţinem

$$x'(p - \varphi(p)) = x\varphi'(p) + \psi'(p).$$

Cum $p - \varphi(p) \neq 0$, obţinem o ecuaţie liniară neomogenă

$$x' = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

definită pe un interval $J \subset \mathbb{R}$. Deci o soluţie a sa este $x = x(p, c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Din ecuaţia (1.11) deducem $y = x(p, c)\varphi(p) + \psi(p)$ şi soluţia ecuaţiei Lagrange este dată sub forma parametrică

$$x = x(p, c)$$

$$y = x(p, c)\varphi(p) + \psi(p), \quad p \in J.$$

**Exemplul 1.22.** $y = 2xy' - y'^2$

*Demonstraţie.* Facem substituţia $y' = p$ şi obţinem

$$y = 2xp - p^2. \tag{1.12}$$

Derivăm ecuaţia în raport cu $x$ şi obţinem

$$p = 2p + 2xp' - 2pp'.$$

Rezultă $p'(2p - 2x) = p$ sau $\frac{dp}{dx}(2p - 2x) = p$ sau $\frac{dp}{dx} = \frac{2p-2x}{p} = 2 - 2\frac{x}{p}$ sau $p\frac{dx}{dp} = -2x + 2p$.

Soluţia generală a acestei ecuaţii liniare este $x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$.

Inlocuind pe $x$ în (1.12) obţinem $y = \frac{p^2}{3} + \frac{2c}{p}$.

Soluţia generală parametrică a ecuaţiei date este

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$$

$$y = \frac{p^2}{3} + \frac{2c}{p}$$

□

**Exemplul 1.23.** $x + y = \left(\frac{y'+1}{y'-1}\right)^2$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ în ecuaţie şi derivăm în raport cu $x$. Avem

$$1 + p = 2\left(\frac{p+1}{p-1}\right) \cdot \frac{-2}{(p-1)^2} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Ecuaţia se mai scrie $dx = \frac{-4dp}{(p-1)^3}$ şi are soluţia generală $x = c + \frac{2}{(p-1)^2}$.

Din ecuaţia dată deducem $y = \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 - \frac{2}{(p-1)^2} - c$. □

**Exemplul 1.24.** $y = xy'^2 + y'^2$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ în ecuaţie şi derivăm în raport cu $x$. Avem

$$p = p^2 + (2xp + 2p)\frac{dp}{dx}.$$

Pentru $p = 0$ găsim soluţia $y = 0$.

Egalând cu zero al doilea factor rezultă

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} = -\frac{2}{p-1}.$$

Integrala generală a acestei ecuaţii liniare este $x = \frac{c}{(p-1)^2} - 1$.

Din ecuaţia dată obţinem $y = \frac{cp^2}{(p-1)^2}$. □

### 1.6.2 Ecuaţii Clairaut

Ecuaţia Clairaut este o formă particulară a ecuaţiei Lagrange. Dacă $\varphi(y') \equiv y'$, ecuaţia Lagrange devine

$$y = xy' + \psi(y').$$

Notăm $y' = p$ şi derivând în raport cu $x$ obţinem

$$p = p + xp + \varphi'(p)p'$$

sau

$$p'(x + \psi'(p)) = 0$$

Avem de tratat două cazuri:

$p' = 0$ şi $x + \psi'(p) = 0$.

In cazul $p' = 0$ avem $p = c$ şi înlocuind în ecuaţia dată , avem integrala generală $y = cx + \psi(c)$.

Observăm că integrala generală a ecuaţiei Clairaut se obţine înlocuind pe $p$ cu constanta arbitrară $c$ în ecuaţie; de exemplu, ecuaţia $y = px + p^2$ are integrala generală $y = cx + c^2$.

Studiem a doua posibilitate $x + \psi'(p) = 0$ sau $x = -\psi'(p)$ şi din ecuaţia iniţială obţinem soluţia parametrică

$$x = -\psi'(p), \;\; y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

care este soluţie singulară a ecuaţiei Clairaut.

**Exemplul 1.25.** $y = xy' + y'^n$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi derivăm ecuaţia :

$$p = xp' + p + np^{n-1}p'.$$

Rezultă $p'(x + np^{n-1}) = 0$. In cazul $p' = 0$ avem $p = c$, deci $y = cx + c^n$ este soluţia generală .

Integrala singulară se obţine din $x = -np^{n-1}, \;\; y = (1-n)p^n$.

Ecuaţia carteziană a soluţiei singulare este $\left(\frac{x}{-n}\right)^n = \left(\frac{y}{1-n}\right)^{n-1}$ şi reprezintă înfăşurătoarea familiei de drepte $y = cx + c^n$. □

**Exemplul 1.26.** $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi derivăm ecuaţia :

$p = p + xp' + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}p'$ sau $\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$

In cazul $\frac{dp}{dx} = 0$ avem $p = c$, deci $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$ este soluţia generală .

Integrala singulară este $x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \;\; y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, adică $x^2 + y^2 = 1$. □

**Exemplul 1.27.** $y = xy' + \frac{1}{y'}$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi derivăm ecuaţia :

$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$ sau $\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0$.

In cazul $\frac{dp}{dx} = 0$ avem $p = c$, deci $y = cx + \frac{1}{c}$ este soluţia generală .

Integrala singulară este $x = \frac{1}{p^2}, \;\; y = \frac{2}{p}$, adică $y^2 = 4x$. □

### 1.6.3 Ecuaţii de forma $x = f(y'),\ \ f \in \mathcal{C}^1$

Pentru o astfel de ecuaţie, notăm $y' = p$ şi rezolvăm $x = f(p)$.
Cum $y' = \frac{dy}{dx} = p$, rezultă $dy = pdx = pf'(p)dp$ şi soluţia este dată de

$$x = f(p)$$

$$y = \int pf'(p)dp + c$$

**Exemplul 1.28.** $x = 2y' + \mathrm{e}^{y'}$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$, deci $dy = pdx$, dar $dx = (2 + \mathrm{e}^p)dp$. Aşadar, $y = \int (2 + \mathrm{e}^p)pdp = p^2 + \mathrm{e}^p(p-1) + c$.
Soluţia generală este $x = 2p + \mathrm{e}^p,\ \ y = p^2 + \mathrm{e}^p(p-1) + c$. □

### 1.6.4 Ecuaţii de forma $y = f(y'),\ \ f \in \mathcal{C}^1$

Notăm $y' = p$ şi rezultă $y = f(p)$.
Cum $y' = \frac{dy}{dx} = p$, rezultă $dx = \frac{dy}{p} = \frac{f'(p)}{p}dp$, de unde

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}dp + c$$

$$y = f(p)$$

**Exemplul 1.29.** $y'y - (y')^2 = 1$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi rezultă $py - p^2 = 1$, deci $y = \frac{1}{p} + p$.
Cum $dx = \frac{dy}{p}$, rezultă $dx = \frac{-\frac{1}{p^2}+1}{p}dp = \frac{-1+p^2}{p^3}dp$, deci

$$x = \int \frac{-1+p^2}{p^3}dp = \ln p + \frac{1}{2p^2} + c.$$

□

**Exemplul 1.30.** $y = \ln(1 + y'^2)$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi rezultă $y = \ln(1 + p^2)$.
Cum $dx = \frac{dy}{p}$, rezultă $dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{2p}{1+p^2}dp$, deci $x = 2\mathrm{arctg}\, p + c$. □

**Exemplul 1.31.** $y = y'^2 + 2y'^3$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi rezultă $y = p^2 + 2p^3$.
Cum $dx = \frac{dy}{p}$, rezultă $dx = \frac{1}{p} \cdot (2p + 6p^2)dp = (2 + 6p)dp$, deci

$$x = 2p + 3p^2 + c.$$

□

### 1.6.5 Ecuaţii de forma $y = f(x, y'),\ \ f \in \mathcal{C}^1$

Notăm $y' = p$ şi derivând în raport cu $x$ obţinem

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \tag{1.13}$$

Ecuaţia astfel rezultată o rezolvăm în raport cu $\frac{dp}{dx}$.

Dacă putem integra ecuaţia (1.13) avem $p = \varphi(x, c)$ şi $y = f(x, \varphi(x, c))$ soluţia generală .

**Exemplul 1.32.** $y'^2 + xy' + 3y + x^2 = 0$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi derivăm ecuaţia în raport cu $x$ :
$2p\frac{dp}{dx}+p+x\frac{dp}{dx}+3p+2x = 0$ sau $\frac{dp}{dx}(2p+x)+4p+2x = (2p+x)\left(\frac{dp}{dx}+2\right) = 0$.

Din $\frac{dp}{dx} = -2$ rezultă $p = -2x+c$, deci $y = -\frac{1}{3}[x^2+x(c-2x)+(c-2x)^2]$ este soluţia generală .

Avem $x = -2p$ care împreună cu $y = -\frac{1}{3}(x^2 + xp + p^2)$ ne dă
$x = -2p,\ \ y = -p^2$. □

**Exemplul 1.33.** $y = \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{x^2}y'^2$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi derivăm ecuaţia în raport cu $x$:
$p = \frac{1}{2}p - \frac{2}{x^3}p^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{2p}{x^2}\right)\frac{dp}{dx}$ sau $(x^3 + 4p)(xdp - pdx) = 0$.

Dacă $xdp - pdx = 0$, avem $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, deci $p = cx$ şi soluţia generală va fi $y = \frac{1}{2}cx^2 + c^2$.

Pentru $x^3 + 4p = 0$ avem $x = (-4p)^{\frac{1}{3}}$ şi $y = (2^{-\frac{4}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})p^{\frac{4}{3}}$ soluţia singulară . □

### 1.6.6 Ecuaţii de forma $x = f(y, y'),\ \ f \in \mathcal{C}^1$

Notăm $y' = p$ şi rezultă $x = f(y, p)$. Derivăm ecuaţia în raport cu $y$ considerând $x$ şi $p$ ca funcţii de $y$ :

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \tag{1.14}$$

Dacă putem integra (1.14), care este o ecuaţie diferenţială în $p$ şi $y$ explicitată în raport cu $\frac{dp}{dy}$, obţinem

$$p = \varphi(y, c). \tag{1.15}$$

Dacă introducem pe (1.15) în (1.14) obţinem soluţia generală $x = f(y, \varphi(y, c))$.

**Exemplul 1.34.** $x = \frac{1}{y'}y + y'^n$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p$ şi rezultă $x = \frac{1}{p}y + p^n$. Derivăm în raport cu $y$ şi obţinem :
$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - y\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy} + np^{n-1}\frac{dp}{dy}$ sau $\frac{dp}{dy}(np^{n-1} - \frac{y}{p^2}) = 0$.

Din $\frac{dp}{dy} = 0$ avem $p = c$, deci soluţia generală $x = \frac{1}{c}y + c^n$.

Din $np^{n-1} - \frac{y}{p^2} = 0$, avem $y = np^{n+1}$ şi $x = (n+1)p^n$ obţinând astfel soluţia singulară . □

**Exemplul 1.35.** $x = \frac{\sqrt{y}}{y'} - \frac{2y}{y'}$

*Demonstraţie.* Notăm $y' = p(y)$ şi obţinem $x = y^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{p} - 2y \cdot \frac{1}{p}$. Derivăm în raport cu $y$ şi obţinem :

$\frac{6\sqrt{y}-1}{2\sqrt{y}(2y-\sqrt{y})}dy = \frac{dp}{p}$ sau $\sqrt{y}(2\sqrt{y}-1)^2 = cp$.

Inlocuind $p$ cu relaţia ce exprimă ecuaţia, obţinem :

$x = (\sqrt{y} - 2y)cy^{-\frac{1}{2}}(2\sqrt{y}-1)^{-2}$ echivalent cu $(x-c)^2 = 4x^2y$. □

# Capitolul 2

# Sisteme de ecuaţii diferenţiale

**Definiţia 2.1.** Sistemul de $n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

cu $f_i$ continue pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall i = \overline{1,n}$ se numeşte sistem sub **forma normală** .

**Definiţia 2.2.** Se numeşte **soluţie** a sistemului (2.1), soluţie pe un interval $I = (a, b)$, orice sistem de funcţii reale $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ definite pe $I$ ce satisface următoarele condiţii:

1. $\varphi_i$ sunt derivabile pe $I$, $\forall i = \overline{1,n}$;
2. $(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in D$ pentru $\forall t \in I$;
3. $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ verifică ecuaţia $\varphi_i'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $\forall t \in I$ şi $i = \overline{1,n}$.

**Definiţia 2.3.** Fie $(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in D$ arbitrar. Problema determinării unei soluţii a sistemului (2.1) pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ care să verifice condiţia

$$\varphi_i(t_0) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

se numeşte **problema Cauchy** cu datele $t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Condiţia (2.2) se numeşte **condiţia iniţială** .

Soluţiile unui sistem diferenţial se numesc **curbe integrale** ale sistemului.

Se numeşte **soluţie generală** a sistemului (2.1) o soluţie a sistemului depinzând de $n$ constante reale arbitrare.

Se numeşte **soluţie particulară** a sistemului, orice soluţie obţinută din soluţia generală prin particularizarea constantelor.

**Teorema 2.1.** *(de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy) Presupunem că funcţia $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ din sistemul diferenţial (2.1) este de clasă $\mathcal{C}^1(D)$. Atunci există o soluţie $x = \varphi(t)$ a sistemului diferenţial (2.1), definită în vecinătatea $V$ a lui $t_0$ care verifică (2.2). Orice două soluţii ale sistemului diferenţial (2.1) care verifică condiţiile iniţiale Cauchy (2.2) coincid într-o vecinătate a lui $t_0$.*

## 2.1 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili

**Definiţia 2.4.** Fie $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ o matrice cu $a_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ funcţii continue şi $b(t) = (b_i(t))_{1\leq i\leq n}$, unde $b_i\colon I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue. Sistemul diferenţial

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{2.3}$$

se numeşte **sistem diferenţial liniar neomogen (de ordinul întâi) cu coeficienţi variabili**. Dacă $b(t) \equiv 0$, sistemul diferenţial

$$x' = A(t)x \tag{2.4}$$

se numeşte **sistem diferenţial liniar omogen (de ordinul întâi) cu coeficienţi variabili**.

**Teorema 2.2.** *Pentru sistemul diferenţial (2.3) există şi este unică o soluţie $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ care verifică condiţiile iniţiale*

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.5}$$

*cu $t_0 \in I$ şi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixate arbitrar.*

**Teorema 2.3.** *Fie $x' = A(t)x$ un sistem diferenţial liniar omogen cu coeficienţi variabili, $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$, unde $a_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue. Fie $S = \left\{x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid x \text{ soluţie a sistemului } x' = A(t)x\right\}$ mulţimea soluţiilor sistemului diferenţial liniar omogen. Atunci :*

1. *$S$ este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$;*
2. *Fie $t_0 \in I$ fixat şi $x \in S$ cu $x(t_0) = 0$. Rezultă $x \equiv 0$.*
3. *Fie $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \in S$ şi $t_0 \in I$ fixat. Soluţiile $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\right\}$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă vectorii $\left\{x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), \ldots, x^{(k)}(t_0)\right\}$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^n$.*

*4.* $\dim_{\mathbb{R}} S = n$.

**Definiţia 2.5.** Orice bază a spaţiului $S$ al soluţiilor sistemului diferenţial liniar omogen $x' = A(t)x$ se numeşte **sistem fundamental de soluţii**.

**Definiţia 2.6.** Fie $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} \in S$ un sistem fundamental de soluţii

$$x^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(j)}(t) \\ x_2^{(j)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(j)}(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,n},$$

unde $x_k^{(j)} \colon I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$.

Matricea de funcţii

$$X(t) = (x^{(1)}(t)|x^{(2)}(t)|\ldots|x^{(n)}(t)) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \ldots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \ldots & x_2^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \ldots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

se numeşte **matrice fundamentală** a sistemului diferenţial şi determinantul ei, $\det X(t) = W(t)$, se numeşte **wronskianul** sistemului fundamental $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right\}$.

**Corolarul 2.1.** *Fie $X(t) \in M_n(\mathcal{C}^1(I))$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial liniar omogen $x' = A(t)x$. Atunci orice soluţie $x \in S$ are forma $x(t) = X(t) \cdot C$, unde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soluţia problemei Cauchy $x' = A(t)x$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ are forma $x(t) = X(t) \cdot (X(t_0))^{-1} x_0$.*

*Demonstraţie.* Deoarece coloanele matricei fundamentale $X(t)$, $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right\} \subset S$ formează o bază a lui $S$, pentru orice $x \in S$ există constantele reale $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}.$$

Rezultă că $\forall t \in I$ avem $x(t) = X(t) \cdot C$, unde $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Impunând condiţia $x(t_0) = x_0$ soluţiei oarecare $x(t) = X(t) \cdot C$ obţinem sistemul algebric liniar

$$X(t_0) \cdot C = x_0. \tag{2.6}$$

Deoarece $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right\}$ este un sistem fundamental de soluţii, coloanele matricei $X(t_0)$ sunt liniar independente, deci $\text{rang} X(t_0) = n$, adică

$$W(t_0) = \det X(t_0) \neq 0.$$

Atunci sistemul algebric liniar (2.6) are soluţia unică $C = (X(t_0))^{-1} \cdot x_0$, deci soluţia problemei Cauchy este $x(t) = X(t) \cdot (X(t_0))^{-1} \cdot x_0$. □

**Observaţia 2.1.** Soluţia $x(t) = X(t) \cdot C$, cu $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ se numeşte **soluţia generală** a sistemului diferenţial omogen.

**Teorema 2.4.** ***(Liouville)*** *Dacă $W(t)$ este wronskianul sistemului fundamental de soluţii $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ al sistemului diferenţial liniar omogen (2.4), atunci*

$$W(t) = W(t_0) \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} TrA(\tau)d\tau},$$

*unde $TrA(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ este urma matricei $A(t)$ şi $t_0 \in I$ este fixat.*

*Demonstraţie.* Fie $W(t) = \det X(t)$. Scriind $W(t)$ cu ajutorul definiţiei determinantului şi derivând în raport cu $t$, obţinem că

$$W(t) = W_1(t) + W_2(t) + \ldots + W_n(t),$$

unde

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \ldots & x_1^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_i^{(1)})'(t) & (x_i^{(2)})'(t) & \ldots & (x_i^{(n)})'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \ldots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ are aceleaşi linii ca şi $W(t)$ cu excepţia liniei $i$, în care apar derivatele funcţiilor $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$. Deoarece coloanele matricei $X(t)$ sunt soluţii ale sistemului (2.4), obţinem relaţiile

$$(x_i^{(j)})'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) \cdot x_k^{(j)}(t), \;\; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Inlocuind pe $(x_i^{(j)}(t))'$ în $W_i(t)$ obţinem că $W_i(t)$ este egal cu suma a $n$ determinanţi, dintre care $n-1$ au câte două coloane proporţionale, deci

$$W_i(t) = a_{ii}(t) \cdot W(t), \;\; \forall t \in I.$$

Atunci rezultă că $W'(t) = \mathrm{Tr}A(t) \cdot W(t), \;\; t \in I$, adică funcţia $W(t)$ satisface o ecuaţie diferenţială liniară omogenă . Aşadar,

$$W(t) = C \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}A(\tau)d\tau}, \;\; \text{cu} \;\; C \in \mathbb{R} \;\; \text{constantă} \; .$$

□

**Lema 2.1.** *Fie $S$ mulţimea soluţiilor sistemului diferenţial liniar omogen (2.4) şi $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor sistemului diferenţial liniar neomogen (2.3). Dacă $x_p \in \mathcal{S}$ este o soluţie fixată (particulară ), atunci avem*

$$\mathcal{S} = S + x_p = \{x + x_p | \;\; x \in S\}.$$

*Demonstraţie.* Atât soluţiile din $S$ cât şi soluţiile din $\mathcal{S}$ sunt definite pe tot intervalul real $I = (a, b)$, deci în egalitatea $\mathcal{S} = S + x_p$ adunarea funcţiilor şi egalitatea funcţiilor se consideră tot pe intervalul $I$.

Pentru orice $x \in S$ avem $x'(t) = A(t)x(t)$ şi adunând cu $x_p'(t) = A(t)x_p(t) + b(t)$ obţinem $(x + x_p)'(t) = A(t)(x + x_p)(t) + b(t), \ \forall t \in I$, deci $S + x_p \subset \mathcal{S}$. Reciproc, pentru orice $y \in \mathcal{S}$ avem $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$, de unde $(y - x_p)'(t) = A(t)(y - x_p)(t), \ \forall t \in I$, adică $y - x_p = x \in S$, deci $y = x + x_p \in S + x_p$ şi $\mathcal{S} \subset S + x_p$. □

**Teorema 2.5.** *(**Lagrange**) Fie $X(t) \in M_n(\mathcal{C}^1(I))$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial liniar omogen (2.4). Atunci orice soluţie $x \in \mathcal{S}$ are forma*

$$x(t) = X(t)\left(C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right),$$

*unde $t_0 \in I$ este fixat şi $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soluţia problemei Cauchy*

$$x' = A(t)x + b(t), \ \ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

*are forma*

$$x(t) = X(t)\left(X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right).$$

*Demonstraţie.* Din Lema 2.1 rezultă că e suficient să aflăm o soluţie particulară $x_p \in \mathcal{S}$. Vom aplica metoda variaţiei constantelor, adică vom căuta o soluţie particulară de forma

$$x_p(t) = c_1(t) \cdot x^{(1)}(t) + c_2(t) \cdot x^{(2)}(t) + \ldots + c_n(t) \cdot x^{(n)}(t),$$

unde constantele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ din soluţia generală a sistemului omogen au fost înlocuite cu funcţiile necunoscute de clasă $\mathcal{C}^1$, $c_i \colon I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Calculăm derivata

$$x_p'(t) = c_1'(t)x^{(1)}(t) + \ldots + c_n'(t)x^{(n)}(t) + c_1(t)(x^{(1)})'(t) + \ldots + c_n(t)(x^{(n)})'(t).$$

Punem condiţia ca $x_p$ să fie soluţie a sistemului diferenţial neomogen (2.3) şi ţinem seama de faptul că $x^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ sunt soluţii ale sistemului diferenţial omogen (2.4), adică $(x^{(j)})'(t) = A(t)x^{(j)}(t)$, $jj = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă egalitatea:

$$c_1'(t)x^{(1)}(t) + \ldots + c_n'(t)x^{(n)}(t) + c_1(t)(x^{(1)})'(t) + \ldots + c_n(t)(x^{(n)})'(t) =$$

$$A(t)(c_1(t) \cdot x^{(1)}(t) + c_2(t) \cdot x^{(2)}(t) + \ldots + c_n(t) \cdot x^{(n)}(t)) + b(t),$$

deci $c_1'(t)x^{(1)}(t) + \ldots + c_n'(t)x^{(n)}(t) = b(t), \ \forall t \in I$.

Putem scrie egalitatea de mai sus sub forma $X(t) \cdot C'(t) = b(t)$, unde $C'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}$. Deoarece rang$X(t) = n$, rezultă că $W(t) = \det X(t) \neq 0$, deci $X(t)$ este inversabilă . Atunci $C'(t) = X^{-1}(t) \cdot b(t),\ \forall t \in I$. Integrând pe fiecare componentă obţinem în scriere vectorială

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau,$$

deci soluţia particulară are forma

$$x_p(t) = X(t) \cdot \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau,\ \ \forall t \in I.$$

Atunci o soluţie oarecare $x \in \mathcal{S}$ are forma

$$x(t) = X(t) \left( C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau \right),\ \ \forall t \in I.$$

Impunând condiţia $x(t_0) = x_0$ obţinem ca şi în demonstraţia Corolarului 2.1, sistemul algebric liniar $X(t_0)C = x_0$, cu soluţia unică $C = X^{-1}(t_0)x_0$.

Atunci soluţia problemei Cauchy are forma

$$x(t) = X(t) \left( X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau \right),\ \ \forall t \in I.$$

□

## 2.2 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

**Definiţia 2.7.** Fie matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Sistemul diferenţial

$$x' = Ax \tag{2.7}$$

se numeşte **sistem diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi**.

**Observaţia 2.2.** Deoarece elementele $a_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ sunt constante, din Teorema 2.2 rezultă că soluţiile sistemului (2.7) sunt definite pe $\mathbb{R}$.

**Teorema 2.6.** *Fie $S$ spaţiul vectorial real al soluţiilor sistemului (2.7).*

1. *Dacă $x \in S$, atunci $x' \in S$.*
2. *Fie $\lambda \in \sigma(A),\ \lambda \in \mathbb{R}$ şi $x_0 \in V_\lambda$. Fie $t_0 \in \mathbb{R}$ fixat şi fie $x \in S$ soluţia care verifică condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$. Atunci $x(t) \in V_\lambda$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.*

*3. Fie $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $u \in V_\lambda$. Atunci funcţia $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot u$, $t \in \mathbb{R}$ este soluţie a sistemului (2.7).*

*Demonstraţie.* 1. Fie $x \in S$. Atunci $x' = Ax$ şi deoarece $x$ este funcţie de clasă $\mathcal{C}^\infty$ putem deriva relaţia anterioară : $x'' = Ax' + A'x$ sau $(x')' = Ax'$, deci $x' \in S$.

2. Dacă $x_0 = 0$, atunci $x(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (Teorema 2.3, punctul 2), deci $x(t) \in V_\lambda$. Fie $x_0 \neq 0$. Din $x_0 \in V_\lambda$ rezultă că $Ax_0 = \lambda x_0$. Funcţia $y = Ax - \lambda x = x' - \lambda x \in S$ şi $y(t_0) = Ax_0 - \lambda x_0 = 0$, deci $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, adică $Ax(t) = \lambda x(t)$, de unde rezultă că $x(t) \in V_\lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

3. Avem $x'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot u$; $Ax(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} Au = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot u$, deci $x'(t) = Ax(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, adică $x \in S$. □

1.**Cazul când $A \in M_n(\mathbb{R})$ este matrice diagonalizabilă**

Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(A)$ valori proprii reale şi $\{u_1, \ldots, u_n\}$ o bază în $\mathbb{R}^n$ formată din vectorii proprii corspunzători valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Conform Teoremei 2.6, rezultă că funcţiile

$$x^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot u_1, \quad x^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \cdot u_2, \quad x^{(n)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_n t} \cdot u_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

sunt soluţii ale sistemului (2.7).

Pentru $t = 0$ obţinem $x^{(i)}(0) = u_i$, $\forall i = \overline{1,n}$, deci $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este sistem liniar independent de vectori în $\mathbb{R}^n$. Conform Teoremei 2.3, punctul 3, mulţimea $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\} \subset S$ este sistem liniar independent . Deoarece $\dim_{\mathbf{R}} S = n$ (Teorema 2.3, punctul 4), rezultă că $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ este bază în $S$, deci este sistem fundamental de soluţii.

Prin urmare o matrice fundamentală de soluţii pentru sistemul (2.7) este

$$X(t) = (\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot u_1 | \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \cdot u_2 | \ldots | \mathrm{e}^{\lambda_n t} \cdot u_n)$$

2.**Cazul când $A \in M_n(\mathbb{R})$ nu se diagonalizează peste $\mathbb{R}$, dar polinomul ei caracteristic admite rădăcinile reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ cu ordinul de multiplicitate $n_1, \ldots, n_k$ ($n_1 + \ldots + n_k = n$)**

Putem căuta soluţii pentru sistemul (2.7) de forma $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ cu $x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(t) \mathrm{e}^{\lambda_i t}$, $j = \overline{1,n}$ cu $P_{ij}(t)$ polinoame de grad mai mic sau egal cu $n_i - 1$. Punând condiţia ca această funcţie să fie soluţie a sistemului, se determină coeficienţii polinoamelor $P_{ij}(t)$. Această metodă se numeşte **metoda coeficienţilor nedeterminaţi**.

3.**Cazul când $A \in M_n(\mathbb{R})$ nu se diagonalizează peste $\mathbb{R}$, iar polinomul ei caracteristic admite şi rădăcinile complexe**

Polinomul caracteristic al lui $A$ având şi soluţii complexe $\lambda$, rezultă că el are ca soluţie şi pe $\overline{\lambda}$. Pentru a indica un sistem fundamental de soluţii reale pentru sistemul (2.7) se procedează astfel :

Se consideră $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ şi se rezolvă sistemul ca fiind cu coeficienţi din $\mathbb{C}$. Soluţiile corespunzătoare lui $\overline{\lambda}$ sunt conjugatele soluţiilor corespunzătoare lui $\lambda$.

**Propoziţia 2.1.** *Fie sistemul (2.7) cu $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi $z(t) = P(t) + \mathrm{i}Q(t)$ o funcţie $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ derivabilă . Privind sistemul diferenţial (2.7) ca fiind un sistem cu $A$ din $M_n(\mathbb{C})$ avem :*

1. *$z$ este soluţie a sistemului dacă şi numai dacă $P$ şi $Q$ sunt soluţii reale ale sistemului dacă şi numai dacă $\overline{z} = P - \mathrm{i}Q$ soluţie a sistemului.*
2. *dacă $z, \overline{z}, y = \overline{y}$ sunt soluţii liniar independente peste $\mathbb{C}$, rezultă $P = Rez, Q = Imz$, $y$ sunt soluţii liniar independente peste $\mathbb{R}$.*

**Observaţia 2.3.** Un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul diferenţial liniar real (2.7) este dat de

$$\left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, \mathrm{Re}x^{(s+1)}, \ldots, \mathrm{Re}x^{(s+k)}, \mathrm{Im}x^{(s+1)}, \ldots, \mathrm{Im}x^{(s+k)}\right\},$$

unde

$$\left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}, x^{(s+1)}, \ldots, x^{(s+k)}, \overline{x^{(s+1)}}, \ldots, \overline{x^{(s+k)}}\right\}$$

este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (2.7), cu $A$ considerată din $M_n(\mathbb{C})$.

**Exemplul 2.1.** Să se rezolve sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' &= 3x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_3' &= -4x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

*Demonstraţie.* Scriem ecuaţia caracteristică a sistemului

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$$

Ea are rădăcinile $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$. Vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$, deci matricea $A$ este diagonalizabilă . Aşadar, o matrice fundamentală a sistemului este $X(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{-2t} & -9\mathrm{e}^{3t} \\ -2\mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{-2t} & 7\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$. Atunci soluţia generală a sistemului este

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} + c_3\mathrm{e}^{3t} \\ x_2(t) &= 3c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} - 9c_3\mathrm{e}^{3t} \\ x_3(t) &= -2c_1\mathrm{e}^{2t} + 2c_2\mathrm{e}^{-2t} + 7c_3\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$$

□

**Exemplul 2.2.** Să se rezolve sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{aligned} x_1' &= -9x_1 - 12x_2 - 5x_3 \\ x_2' &= 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ x_3' &= x_1 + 4x_2 + x_3 \end{aligned}$$

*Demonstraţie.* Scriem ecuaţia caracteristică a sistemului

$$\begin{vmatrix} -9-\lambda & -12 & -5 \\ 5 & 6-\lambda & 3 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)^2 = 0$$

Ea are rădăcinile $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1$ este $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Avem $V_{\lambda_2} = \mathrm{sp}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, deci $\dim V_{\lambda_2} = 1 \neq 2$ care este ordinul de multiplicitate al valorii proprii $\lambda_2$, deci matricea $A$ nu este diagonalizabilă . Suntem în cazul 2, deoarece valorile proprii sunt reale, deci vom determina soluţia generală a sistemului cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Căutăm soluţia de forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{-2t}(a_1 t + b_1) \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{-2t}(a_2 t + b_2) \\ x_3(t) &= \mathrm{e}^{-2t}(a_3 t + b_3) \end{aligned}$$

Punând condiţia ca aceste funcţii sa verifice sistemul dat se determină coeficienţii $a_i$ şi $b_i$, $i = \overline{1,3}$.

Soluţia generală a sistemului va fi :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -2c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2 a_1 \mathrm{e}^{-2t}t + c_3 b_1 \mathrm{e}^{-2t} \\ x_2(t) &= c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2 a_2 \mathrm{e}^{-2t}t + c_3 b_2 \mathrm{e}^{-2t} \\ x_3(t) &= 2c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2 a_3 \mathrm{e}^{-2t}t + c_3 b_3 \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

unde $a_i$ şi $b_i$, $i = \overline{1,3}$ sunt coeficienţii determinaţi anterior. □

**Exemplul 2.3.** Să se rezolve sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi:

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= -10x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ x_3' &= 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

*Demonstraţie.* Scriem ecuaţia caracteristică a sistemului

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 2 \\ -10 & 6-\lambda & 8 \\ 3 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ea are rădăcinile $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1+\mathrm{i}, \lambda_3 = 1-\mathrm{i}$. Vectorii proprii corespunzători fiecărei valori proprii sunt :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Notând cu $x^{(1)} = \mathrm{e}^{0\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, x^{(3)} = \overline{x^{(2)}}$ vom avea $x^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(-\cos t - \sin t) \\ -2\mathrm{e}^t \cos t \\ -\mathrm{e}^t \sin t \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) \\ -2\mathrm{e}^t \sin t \\ \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix}$. O matrice fundamentală a sistemului este $X(t) = (x^{(1)}\ \mathrm{Re}x^{(2)}\ \mathrm{Im}x^{(2)})$ şi înlocuind obţinem $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^t(-\cos t - \sin t) & \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) \\ -1 & -2\mathrm{e}^t \cos t & -2\mathrm{e}^t \sin t \\ 2 & -\mathrm{e}^t \sin t & \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix}$.

Deci soluţia generală a sistemului este :

$$x_1(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^t(-\cos t - \sin t) + c_3\mathrm{e}^t(\cos t - \sin t)$$

$$x_2(t) = -c_1 - 2c_2\mathrm{e}^t \cos t - 2c_3\mathrm{e}^t \sin t$$

$$x_3(t) = 2c_1 - c_2\mathrm{e}^t \sin t + c_3\mathrm{e}^t \cos t$$

□

**Exemplul 2.4.** Să se rezolve sistemul determinând o soluţie particulară prin metoda variaţiei constantelor :

$$x_1' + 2x_1 - x_2 = t^2$$
$$x_2' + x_1 = 2t - 1$$

*Demonstraţie.* Asociem sistemul omogen

$$x_1' + 2x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2' + x_1 = 0$$

Ecuaţia caracteristică este $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0$. Rădăcinile ei sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Avem $V_{\lambda_1} = \mathrm{sp}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, deci $\dim V_{\lambda_1} = 1 \neq 2$ care este ordinul de multiplicitate a lui $\lambda_1$, deci matricea sistemului nu este diagonalizabilă . Aşadar se caută soluţie prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi de forma

$$\overline{x}_1(t) = \mathrm{e}^{-t}(a_1 t + b_1)$$

$$\overline{x}_2(t) = \mathrm{e}^{-t}(a_2 t + b_2)$$

şi punând condiţia ca aceasta să verifice sistemul omogen obţinem $a_1 = a_2$, $a_1 = b_2 - b_1$. Deci soluţia generală a sistemului omogen se poate scrie astfel

$$\overline{x}_1(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\mathrm{e}^{-t}$$

$$\overline{x}_2(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2(\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t})$$

Se caută o soluţie particulară a sistemului neomogen de forma

$$\overline{x}_{1p}(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{-t} + c_2(t)t\mathrm{e}^{-t}$$

$$\overline{x}_{2p}(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{-t} + c_2(t)(\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t})$$

Determinăm funcţiile $c_1(t)$ şi $c_2(t)$ din sistemul

$$c_1'(t)\mathrm{e}^{-t} + c_2'(t)t\mathrm{e}^{-t} = t^2$$

$$c_1'(t)\mathrm{e}^{-t} + c_2'(t)(\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t}) = 2t - 1$$

Apoi soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen se va scrie

$$x_1(t) = \overline{x}_1(t) + \overline{x}_{1p}(t)$$

$$x_2(t) = \overline{x}_2(t) + \overline{x}_{2p}(t)$$

□

## 2.3 Stabilitatea soluţiilor sistemelor diferenţiale

Fie sistemul diferenţial $x' = v(t, x)$. Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile teoremei fundamentale de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy pentru $t \in [t_0, \infty)$ şi $x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ deschis. Deci pentru orice $x_0 \in U$ există şi este unică o soluţie $x = \varphi(t), \varphi\colon [t_0, \infty) \to U$ astfel încât $\varphi(t_0) = x_0$.

**Definiţia 2.8.** O soluţie $x = \varphi(t), \varphi\colon [t_0, \infty) \to U$ se numeşte **stabilă spre $+\infty$ în sens Poincaré-Liapunov** (sau echivalent $x_0 = \varphi(t_0)$ este **o poziţie de echilibru**) dacă variind "suficient de puţin" data iniţială $x_0$, soluţia corespunzătoare se depărtează şi ea "puţin", i.e. pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât de îndată ce $\widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ şi $\|\widetilde{x}_0 - x_0\| < \delta(\varepsilon)$, soluţiile $\widetilde{\varphi}(t)$ şi $\varphi(t)$ care la momentul $t_0$, iar respectiv valorile $\widetilde{x}_0$ şi $x_0$ satisfac inegalitatea $|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ pentru orice $t \in [t_0, +\infty)$.

Cazul stabilităţii spre $-\infty$ se studiază analog (sau se face schimbarea de variabilă independentă $t = -\tau$).

Considerăm sistemul diferenţial autonom $x' = v(x), x \in U \subset \mathbb{R}^n$, unde $v$ este un câmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^r, r \geq 3$ în domeniul $U$. Presupunem că sistemul are o singură poziţie de echilibru $x_0$ în $U$ $(v(x_0) = 0, x_0 \in U)$

şi să alegem coordonatele $x_i$ astfel încât $x_0 = 0$ (efectuăm o translaţie). Atunci soluţia cu condiţia iniţială $\varphi(t_0) = 0$ este $\varphi(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Putem presupune că $t_0 = 0 \in \mathbb{R}$.

**Definiţia 2.9.** Poziţia de echilibru $x = 0$ a sistemului diferenţial autonom se numeşte **stabilă în sens Poincaré-Liapunov** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ (care depinde numai de $\varepsilon$) astfel încât pentru orice $x_0 \in U$ pentru care $\|x_0\| < \delta$, soluţia $\varphi$ a sistemului cu condiţia iniţială $\varphi(0) = x_0$ se prelungeşte pe întreaga semiaxă $t > 0$ şi satisface inegalitatea $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ pentru orice $t > 0$.

**Definiţia 2.10.** Poziţia de echilibru $x = 0$ a sistemului diferenţial autonom se numeşte **asimptotic stabilă** dacă ea este stabilă şi în plus, pentru soluţia $\varphi(t)$ din Definiţia 2.9 avem

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0.$$

Considerăm mai întâi cazul sistemelor liniare omogene

$$x' = Ax, A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.8}$$

şi presupunem că $A$ este un izomorfism. Atunci $x = 0$ este singurul punct singular al câmpului $v(x) = Ax$, deci $x = 0$ este singura poziţie de echilibru a sistemului (2.8).

**Teorema 2.7.** *(**Poincaré-Liapunov**) Dacă toate valorile proprii ale operatorului liniar $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ au partea reală negativă , atunci poziţia de echilibru $x = 0$ a sistemului diferenţial liniar omogen (2.8) este stabilă asimptotic. Dacă există $\lambda \in \sigma(A)$ cu $Re\lambda > 0$, atunci $x = 0$ este instabilă .*

**Observaţia 2.4.** Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice cu spectrul $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Notăm $\gamma = \max_{1 \le i \le p} (\mathrm{Re}\lambda_i)$. Conform Teoremei 2.7 rezultă că dacă $\gamma < 0$, atunci soluţia $x = 0$ a sistemului $x' = Ax$ este asimptotic stabilă . Orice altă soluţie are aceeaşi proprietate: dacă $x_p$ este o soluţie, atunci $x_p' = Ax_p$ şi punând $x = x_p + y$, rezultă $y' = Ay$, iar soluţia $x = x_p$ corespunde cu $y = 0$. Dacă $\gamma > 0$, atunci soluţia $x = 0$ este instabilă şi se poate arăta că dacă $\gamma = 0$ şi valorile proprii cu partea reală nulă sunt simple, atunci soluţia banală este stabilă (dar nu asimptotic stabilă ). Dacă $\gamma = 0$ şi valorile proprii cu partea reală nulă nu sunt toate simple, atunci soluţia $x = 0$ este instabilă .

**Exemplul 2.5.** Să se studieze stabilitatea poziţiei de echilibru $x = 0$ a sistemului $x' = Ax$, unde $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

*Demonstraţie.* Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, deci fiind reale şi negative, soluţia este asimptotic stabilă . □

**Exemplul 2.6.** Se consideră sistemul diferenţial

$$x' = -x + z$$

$$y' = -2y - z$$

$$z' = y - z$$

Să se studieze stabilitatea punctului de echilibru $(0, 0, 0)$.

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică ataşată

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

are rădăcinile $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cum toate au partea reală negativă rezultă că punctul de echilibru al sistemului considerat este asimptotic stabil. □

**Exemplul 2.7.** Să se studieze stabilitatea poziţiei de echilibru $x = 0$ a sistemului $x' = Ax$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

*Demonstraţie.* Valorile proprii sunt $\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+8}}{2}$, deci fiind reale distincte şi $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, soluţia este instabilă . □

**Teorema 2.8.** *(Liapunov) Dacă toate valorile proprii ale operatorului liniar $A$ sunt situate în semiplanul stâng ($Re\lambda_k < 0, k = 1, 2, \ldots, n$). Atunci poziţia de echilibru $x = 0$ a sistemului neliniar $x' = v(x)$ este asimptotic stabilă .*

**Exemplul 2.8.** Să se studieze stabilitatea soluţiei banale a sistemului

$$x' = -x - y + x^2$$

$$y' = 2\sin x - 3y + y^4$$

*Demonstraţie.* Sistemul liniar asociat este

$$x' = -x - y$$

$$y' = 2x - 3y$$

iar matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Valorile proprii sunt $\lambda_{1,2} = -2 \pm \mathrm{i}$, deci soluţia banală este asimptotic stabilă . □

# Capitolul 3

# Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

**Definiţia 3.1.** Fie $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un domeniu şi $f\colon D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă (de clasă $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$) pe $D$. Se numeşte **ecuaţie diferenţială de ordinul** $n$ orice ecuaţie de forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{3.1}$$

Forma (3.1) se mai numeşte şi **forma normală** a ecuaţiei diferenţiale. Uneori se consideră ecuaţii diferenţiale de ordinul $n$ şi sub **formă implicită** adică

$$F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0, \tag{3.2}$$

unde $F\colon U \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă (de clasă $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$) pe un domeniu $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

**Definiţia 3.2.** Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei (3.1) o aplicaţie de clasă $\mathcal{C}^n$, $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ definită pe un interval $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ astfel încât :

1. punctul $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$, $\forall t \in I$;
2. pentru orice $t \in I$, $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$.

**Definiţia 3.3.** Se numeşte **dată iniţială** orice punct $(t_0, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in D$. Problema Cauchy corespunzătoare constă în determinarea unei soluţii $\varphi(t)$ definită pe o vecinătate a lui $t_0$ astfel încât

$$\varphi(t_0) = \alpha_0, \varphi'(t_0) = \alpha_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}.$$

**Soluţia generală** a ecuaţiei (3.1) este o soluţie a ecuaţiei ce depinde de $n$ constante reale arbitrare.

**Soluţia particulară** a ecuaţiei (3.1) este o soluţie a ecuaţiei ce se obţine din cea generală prin particularizarea constantelor.

## 3.1 Ecuaţii diferenţiale de ordin $n$ rezolvabile prin cuadraturi

### 3.1.1 Ecuaţii de forma $y^{(n)} = f(x),\ \ f \in \mathcal{C}^0(I),\ \ n > 1$

Ecuaţia se rezolvă prin $n$ integrări succesive şi soluţia generală depinde de $n$ constante arbitrare.

**Exemplul 3.1.** $y'' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{6}$

*Demonstraţie.* Integrăm succesiv şi obţinem

$$y' = \int \left( \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{6} \right) dx = x \arcsin x - \frac{\pi}{6} x + c_1$$

(am integrat prin părţi)

Aplicând din nou formula de integrare prin părţi obţinem

$$y(x) = \int \left( x \arcsin x - \frac{\pi}{6} x + c_1 \right) dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{\pi}{12} x^2 + c_1 x + c_2$$

□

**Exemplul 3.2.** $y'' = -\frac{4}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}},\ \ x \in [0, \infty),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$

*Demonstraţie.* Scriem $\frac{dy'}{dx} = -\frac{4}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$, deci $dy' = \left(-\frac{2}{x}\right) \left( \frac{2}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} \right) dx$.

Notăm $v = \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$, deci $dv = \frac{2}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} dx$. Atunci $y' = \int \left(-\frac{2}{x}\right) \left( \frac{2}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} \right) dx =$
$= \int \ln v dv = v \ln v - v + c_1 = \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) - \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + c_1$.

Deci $y(x) = \int \left( \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) - \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + c_1 \right) dx = \int \left( -\frac{2}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} x - \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + c_1 \right) dx =$
$= -x \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + c_1 x + c_2$

Determinăm constantele $c_1$ şi $c_2$ :

$$y(0) = 1 \Longrightarrow c_2 = 1$$

$$y'(0) = 0 \Longrightarrow 0 = \lim_{x \to 0} \left( -\frac{2}{x} \right) \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + c_1 = c_1$$

Deci curba căutată este $y = 1 - x \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}},\ \ x \in [0, \infty)$. □

### 3.1.2 Ecuaţii de forma $f(x, y^{(n)}) = 0$

a) Dacă ecuaţia poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \neq 0\right)$, atunci obţinem una sau mai multe ecuaţii de forma 3.1.1.

b) Dacă ecuaţia $f(x, y^{(n)}) = 0$ nu este rezolvabilă (cu ajutorul funcţiilor elementare) în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaştem o reprezentare parametrică a curbei $f(u, v) = 0$, şi anume $u = g(t) \in \mathcal{C}^1$, $v = h(t) \in \mathcal{C}^0$, $t \in [\alpha, \beta]$, atunci soluţia generală a ecuaţiei 3.2.1 se obţine sub forma parametrică

$$x = g(t), \;\; dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = h(t)g'(t)dt,$$

de unde rezultă

$$y^{(n-1)} = h_1(t, c_1)$$

$$\vdots$$

$$y(t) = h_n(t, c_1, \ldots, c_n)$$

**Exemplul 3.3.** $x - \mathrm{e}^{y''} + y'' = 0$

*Demonstraţie.* Notăm $y'' = t$ şi obţinem $x(t) = \mathrm{e}^t - t$. Cum $dy' = y''dx$, obţinem $dy' = t(\mathrm{e}^t - 1)dt$, respectiv $y' = -\frac{t^2}{2} + t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + c_1$. Dar $dy = y'dx$, deci $dy = \left(-\frac{t^2}{2} + t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + c_1\right)(\mathrm{e}^t - 1)dt$. Aşadar,

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) + \mathrm{e}^t\left(-\frac{t^2}{2} + 1 + c_1\right) + \frac{t^3}{6} - c_1 t + c_2$$

□

### 3.1.3 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

a) Dacă ecuaţia este rezolvabilă prin funcţii elementare în raport cu $y^{(n)}$, punând $z = y^{(n-1)}$, obţinem $z' = f(z)$. Această ecuaţie este cu variabile separabile şi conduce la ecuaţia $z = y^{(n-1)} = f_1(x, c_1)$, care este de tipul anterior.

b) Dacă ecuaţia 3.1.3 nu este rezolvabilă prin funcţii elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaştem o reprezentare parametrică

$$y^{(n-1)} = h(t), \;\; y^{(n)} = g(t), \;\; t \in [\alpha, \beta],$$

atunci folosind relaţia $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, putem obţine soluţia sub formă parametrică

$$x = \int \frac{h'}{g}dt + c_1, \;\; y^{(n-1)} = h(t)$$

$$dy^{(n-2)} = h(t)dx = \frac{hh'}{g}dt$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{hh'}{g} dt + c_2$$

$$\vdots$$

$$y = \int y' dx + c_n$$

**Exemplul 3.4.** $y'' = -\sqrt{1 - y'^2}$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de funcţie $z(x) = y'$ şi ecuaţia diferenţială devine

$$-\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = dx, \ \ |z| < 1.$$

Ea are soluţia generală $\arccos z = x + c_1$ sau $z = \cos(x + c_1)$ sau $y' = \cos(x + c_1)$, de unde deducem $y(x) = \sin(x + c_1) + c_2$.

Soluţii sunt şi dreptele $y = x + c_3$ şi $y = -x + c_4$. □

**Exemplul 3.5.** $y''^2 = y'$

*Demonstraţie.* Rezolvăm ecuaţia în raport cu $y''$ şi obţinem $\frac{y''}{\pm 2\sqrt{y'}} = \frac{1}{2}$ sau $\pm\sqrt{y'} = \frac{1}{2}(x + c_1)$, deci $y' = \frac{1}{4}(x + c_1)^2$.

Integrând obţinem $y(x) = \frac{1}{12}(x + c_1)^3 + c_2$.

Ecuaţia are şi soluţiile $y(x) = c_3$. □

### 3.1.4 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

a) Dacă ecuaţia se poate rezolva (prin funcţii elementare) în raport cu $y^{(n)}$, prin schimbarea de funcţie $z = y^{(n-2)}$, $z$ fiind noua funcţie necunoscută obţinem $z'' = f(z)$. Prin multiplicare cu $2z'$, $z'' = f(z)$ se scrie $d(z')^2 = 2f(z)dz$ şi prin integrare ne dă $z' = \sqrt{2\int f(z)dz + c_1}$, apoi printr-o nouă cuadratură obţinem $F_1(z, x, c_1, c_2) = 0$ sau $F_1(y^{(n-2)}, x, c_1, c_2) = 0$ care este o ecuaţie de tipul 3.1.2.

b) Dacă ecuaţia nu se poate rezolva prin funcţii elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaştem o reprezentare parametrică $y^{(n-2)} = h(t)$ şi $y^{(n)} = g(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, din $\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} = dx$ obţinem pe $y^{(n-1)}$

$$(y^{(n-1)})^2 = 2\int g(t)h'(t)dt + c$$

şi problema s-a redus la una deja întâlnită .

**Exemplul 3.6.** $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$

*Demonstraţie.* Multiplicăm cu $2y'$ şi integrăm. Obţinem $y'^2 = \sqrt{y} + c_1$ şi de aici deducem

$$\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + c_1}} = \pm dx.$$

Notând $\sqrt{y}+c_1 = t^2$, avem $y = (t^2 - c_1)^2$ şi ecuaţia devine $\frac{4t(t^2-c_1)dt}{t} = \pm dx$ şi integrând obţinem $\frac{4}{3}t^3 - 4c_1t + c_2 = \pm x$.

Deci $\pm x = \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{y}+c_1}(\sqrt{y} - 2c_1) + c_2,\ \ y \geq 0,\ \ \sqrt{y}+c_1 \geq 0.$ □

**Exemplul 3.7.** $y'' = -\frac{1}{y^3},\ \ y(2) = 1,\ \ y'(2) = 1$

*Demonstraţie.* Inmulţim ecuaţia cu $y'$ şi integrăm

$$y'^2 = 2c_1 + \frac{1}{y^2}.$$

Acum folosind condiţiile iniţiale date, deducem $c_1 = 0$, deoarece $y'(2) = 1$ şi $y'^2 = \frac{1}{y^2}$, adică $y' = \frac{1}{y}$. Mai integrăm o dată şi găsim $y^2 = 2x + 2c_2$. Având în vedere că $y(2) = 1$, rezultă că $c_2 = -\frac{3}{2}$. Deci soluţia particulară căutată este $y = \sqrt{2(x - \frac{3}{2})}$. □

### 3.1.5 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Ecuaţia se rezolvă făcând schimbarea de funcţie $y^{(k)} = z(x)$ şi obţinem ecuaţia de ordinul $n - k$,

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{3.3}$$

Integrând (3.3) găsim $z = g(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})$ şi astfel obţinem o ecuaţie întâlnită $y^{(k)} = g(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})$.

Dacă (3.3) are integrale singulare, atunci înlocuindu-le în $y^{(k)} = z(x)$ obţinem integralele singulare ale ecuaţiei 3.1.5.

**Exemplul 3.8.** $(1 + x^2)y'' = 2xy'$

*Demonstraţie.* Dacă facem schimbarea de funcţie $y' = z(x)$ obţinem ecuaţia $\frac{z'}{z} = \frac{2x}{1+x^2}$ şi prin integrare avem $z = y' = c_1(1 + x^2)$. Rezultă

$$y(x) = c_1x + c_1\frac{x^3}{3} + c_2.$$

□

**Exemplul 3.9.** $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

*Demonstraţie.* Ecuaţia se mai scrie şi astfel

$$\frac{xy''}{y'} - \ln y' = -\ln x$$

Luând pe $z = \ln y'$ ca funcţie necunoscută , ecuaţia devine liniară

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

Această ecuaţie liniară are soluţia generală $z = c_1 x + \ln x + 1$, deci $\ln y' = 1 + c_1 x + \ln x$ sau $y' = x\mathrm{e}^{1+c_1 x}$, de unde

$$y(x) = \left(\frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2}\right)\mathrm{e}^{1+c_1 x} + c_2.$$

□

### 3.1.6 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (ce nu conţin pe $y$)

Se integrează luând pe $y'$ drept variabilă independentă şi pe $y''$ drept funcţie de $y'$, $y'' = y''(y')$.

**Exemplul 3.10.** $x^2 y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de funcţie $y' = z(x)$ şi obţinem o ecuaţie Riccati

$$z' = \frac{z^2}{x^2} - 2\frac{z}{x} + 2.$$

Această ecuaţie are soluţia particulară evidentă $z_p = x$ şi se integrează punând $z = x + \frac{1}{u(x)}$, $u(x)$ fiind noua funcţie necunoscută . Obţinem $z(x) = x + \frac{c_1 x}{x+c_1}$, deci $y'(x) = x + \frac{c_1 x}{x+c_1}$, de unde $y(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 x - c_1^2 \ln|x+c_1| + c_2$. □

**Exemplul 3.11.** $1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}$

*Demonstraţie.* Impărţim cu $1 + y'^2$, notăm $y' = z$ şi luăm pe $x$ ca funcţie, iar pe $z$ ca variabilă independentă . Obţinem ecuaţia diferenţială liniară

$$\frac{dx}{dz} + \frac{xz}{1+z^2} = \frac{a}{\sqrt{1+z^2}}$$

care are integrala generală $x = \frac{c_1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{az}{\sqrt{1+z^2}}$.

Dacă notăm $z = y' = \operatorname{tg} t$, obţinem $x(t) = c_1 \cos t + a \sin t$. Pe $y$ îl aflăm din relaţia $dy = y'dx$ care ne dă

$$y(t) = -a\cos t + c_1 \sin t - c_1 \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c_2.$$

Astfel soluţia generală a fost dată sub formă parametrică . □

### 3.1.7 Ecuaţii diferenţiale de forma $f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (ce nu conţin pe $x$)

Aceste ecuaţii admit micşorarea ordinului cu o unitate dacă luăm pe $y' = p$ drept nouă funcţie şi pe $y$ drept variabilă independentă .

Procedând aşa este posibil să pierdem soluţii de forma $y = b$. Inlocuind $y = b$ în ecuaţia de forma 3.1.7 putem decide dacă s-au pierdut sau nu soluţii.

**Exemplul 3.12.** $1 + y'^2 = 2yy'$

*Demonstraţie.* Luând pe $y' = p$ drept funcţie şi pe $y$ drept variabilă independentă , obţinem $y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dy}(p)\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ şi ecuaţia dată devine $\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$ ce are drept soluţie $y = c_1(1+p^2)$.

Calculăm acum pe $x$ ca funcţie de $p$ şi $c_1$. Cum $dx = \frac{1}{p}dy$ şi $dy = 2c_1pdp$, rezultă $dx = 2c_1dp$. Deci $x = 2c_1p + c_2$ şi soluţia generală este $x(p) = 2c_1p + c_2$, $y(p) = c_1(1+p^2)$ sau $y = c_1 + \frac{(x-c_2)^2}{4c_1}$ (parabole). □

**Exemplul 3.13.** $y'' - \frac{y'^2}{y} - yy' = 0$

*Demonstraţie.* Procedăm ca la exemplul precedent şi avem

$$p\left(\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} - y\right) = 0.$$

Ea ne dă

i. $p = 0$, deci $y = c_1$

ii. $\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = y$

Această ecuaţie are soluţia generală $p = y(y + c_2)$. Deci $\frac{dy}{y(y+c_2)} = dx$ şi deosebim cazurile :

1. $c_2 = 0$ şi rezultă $\frac{1}{y} + x = c_3$
2. $c_2 \neq 0$ şi rezultă $\frac{dy}{y} - \frac{dy}{y+c_2} = c_2dx$, deci $\frac{y}{y+c_2} = c_4e^{c_2x}$. □

**Exemplul 3.14.** $2y'^2 = y''(y-1),\ \ x_0 = 2,\ \ y_0 = 2,\ \ y_0' = -1$

*Demonstraţie.* Procedând ca mai înainte avem

$$2p^2 = p\frac{dp}{dy}(y-1) \ \text{ sau} \frac{2dy}{y-1} = \frac{dp}{p}.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este $p = c_1(y-1)^2$.

Condiţiile iniţiale ne dau $c_1 = -1$. Deci soluţia generală devine

$$-\frac{dy}{(y-1)^2} = dx,$$

ecuaţie care se integrează obţinând $\frac{1}{y-1} = x + c_2$.

Aplicând condiţiile iniţiale găsim $c_2 = -1$, deci $y = \frac{x}{x-1}$ este ecuaţia curbei căutate. □

### 3.1.8 Ecuaţii de forma $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, omogene în $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Aceste ecuaţii admit micşorarea ordinului cu o unitate dacă facem schimbarea de funcţie $z(x) = \frac{y'}{y}$. Determinând soluţia generală a noii ecuaţii pentru $z(x)$, $y$ rezultă printr-o cuadratură .

**Exemplul 3.15.** $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

*Demonstraţie.* Luăm drept nouă funcţie necunoscută , funcţia $z(x) = \frac{y'}{y}$ şi obţinem

$$y' = zy, \;\; y'' = z'y + z^2y = y(z' + z^2)$$

iar ecuaţia dată devine

$$xy^2(z' + z^2) + xz^2y^2 - zy^2 = 0.$$

Deci obţinem ecuaţia Bernoulli

$$z' + 2z^2 - \frac{z}{x} = 0$$

care se integrează luând $u = z^{-1}$.

Astfel obţinem o ecuaţie liniară în $u(x)$ cu soluţia generală $u(x) = \frac{x^2+c_1}{x}$. Deci $z = \frac{x}{x^2+c_1}$ şi $\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+c_1}$, de unde rezultă $y^2 = c_2(x^2 + c_1)$. □

**Exemplul 3.16.** $x^2yy'' = (y - xy')^2$

*Demonstraţie.* Procedând la fel ca la exemplul anterior obţinem

$$x^2(z' + z^2) = 1 - 2xz + x^2z^2 \;\; \text{sau} z' + \frac{2z}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Această ecuaţie liniară are soluţia generală $z = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$. Deci $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$ şi de aici $y(x) = c_2xe^{-\frac{c_1}{x}}$. □

## 3.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul $n$

### 3.2.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul $n$ cu coeficienţi variabili

**Definiţia 3.4.** O ecuaţie de forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \tag{3.4}$$

cu $a_0, a_1, \ldots, a_n, f$ funcţii continue pe un interval $(a, b)$ se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul $n$ cu coeficienţi variabili**.

Dacă $f(x) \equiv 0$, se spune că ecuaţia (3.4) este **omogenă** , iar dacă $f(x)$ nu este identic nulă , se spune că ecuaţia este **neomogenă** .

**Definiţia 3.5.** Punctele în care se anulează $a_0(x)$ în $(a, b)$ se numesc **puncte singulare** ale ecuaţiei (3.4).

Notăm cu $L[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y$ numit **operator diferenţial liniar**. Ecuaţia (3.4) devine $L[y] = f(x)$.

Operatorul $L$ are proprietatea că $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^n((a, b))$ avem $L[\alpha\varphi + \beta\psi] = \alpha L[\varphi] + \beta L[\psi]$.

Dacă notăm cu $\ker L$ nucleul operatorului diferenţial $L$ (i.e. $y \in \ker L$, dacă $L[y] = 0$), avem $\ker L \subset \mathcal{C}^n((a, b))$ dacă se presupune că $a_0(x) \neq 0$, $x \in$

$(a,b)$, iar $\dim \ker L = n$, o bază a spaţiului vectorial finit dimensional $\ker L$ fiind constituită din orice $n$ soluţii particulare liniar independente în $(a,b)$ ale ecuaţiei diferenţiale $L[y]=0$ şi care vor forma un **sistem fundamental de soluţii** pentru ecuaţia omogenă $L[y]=0$.

**Teorema 3.1.** *Funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^n((a,b))$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială $L[y]=0$ dacă şi numai dacă wronskianul* $W(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ *este nenul pe $(a,b)$.*

*Demonstraţie.* Dacă funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^n((a,b))$ formează un sistem fundamental de soluţii, adică $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt soluţii particulare liniar independente ce formează o bază în $\ker L$, arătăm că într-un punct $x_0 \in (a,b)$ avem $W(y_1,y_2,\ldots,y_n)(x_0) \neq 0$.

Intr-adevăr, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formând o bază în $\ker L$, pentru orice $y \in \ker L$ există un sistem unic de constante $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel încât

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \tag{3.5}$$

Sistemul de constante este unic pentru că , dacă ar mai exista altul $d_1, d_2, \ldots, d_n$ diferit de $c_1, c_2, \ldots, c_n$, atunci $(c_1-d_1)y_1 + (c_2-d_2)y_2 + \ldots + (c_n-d_n)y_n = 0$ ceea ce nu ar fi posibil deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar independente.

Din (3.5) obţinem pentru punctul $x_0$ :

$$\begin{aligned} &y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) \\ &y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Arătăm că acest sistem de ecuaţii în $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are soluţia unică şi anume pe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ din (3.5), care e definit pe $y \in \ker L$.

Dacă sistemul ar mai avea o altă soluţie $d_1, d_2, \ldots, d_n$ diferită de $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ea ar defini un alt element $Y \in \ker L$ :

$$Y = d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d_n y_n$$

ceea ce înseamnă că avem

$$\begin{aligned} &Y(x_0) = d_1 y_1(x_0) + \ldots + d_n y_n(x_0) \\ &Y'(x_0) = d_1 y_1'(x_0) + \ldots + d_n y_n'(x_0) \\ &\vdots \\ &Y^{(n-1)}(x_0) = d_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + d_n y_n^{(n-1)}(x_0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tinând seama că $d_1, d_2, \ldots, d_n$ este o soluţie a sistemului (3.6), rezultă

$$Y(x_0) = y(x_0),\ \ Y'(x_0) = y'(x_0),\ \ Y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \tag{3.8}$$

Insă $y$ şi $Y$ fiind soluţii ale ecuaţiei diferenţiale $L[y] = 0$ şi verificând aceleaşi condiţii ale lui Cauchy (3.8) în punctul $x_0$, în baza teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy, ele sunt identice. Deci $y = Y \in \ker L$ şi deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează o bază în $\ker L$, vom avea $d_i = c_i,\ \ \forall i = \overline{1,n}$.

Astfel am demonstrat că sistemul (3.6) are o soluţie unică ,
deci $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$.

Reciproc, dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \ker L$ sunt astfel încât $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$, atunci arătăm că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental de soluţii pe $(a, b)$.

Presupunem contrariul, adică $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar dependente pe $(a, b)$. Atunci există constantele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nu toate nule astfel încât

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0.$$

Pentru orice $x \in (a, b)$ avem

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0 \\ &c_1 y_1'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) = 0 \\ &\vdots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

şi în particular sistemul este verificat şi pentru $x_0$.

Insă determinantul sistemului în $c_1, c_2, \ldots, c_n$ este $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ şi prin urmare sistemul are doar soluţia banală $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$, contradicţie cu presupunerea făcută . Deci $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar independente şi formează un sistem fundamental de soluţii pe $(a, b)$. □

In ipoteza că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială $L[y] = 0$, orice soluţie a sa se va scrie

$$\overline{y} = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n,\ \ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

**Observaţia 3.1.**

1. Dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei $L[y] = 0$, fie aceea $y_1(x)$, atunci, prin schimbarea de funcţie $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$, $z(x)$ fiind noua funcţie necunoscută , ordinul ei poate fi micşorat cu o unitate.

2. Dacă $a_0(x) + a_1(x) + \ldots + a_n(x) = 0$, atunci ecuaţia $L[y] = 0$ admite soluţia particulară $y_1(x) = \mathrm{e}^x$.

3. Dacă $a_{n-1}(x)+xa_n(x)=0$, atunci $L[y]=0$ admite soluţia particulară $y_1(x)=x$.

4. Ecuaţiile de forma $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0$, unde $a_0,\ldots,a_n$ sunt polinoame, pot admite ca integrale particulare polinoame.

Orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale $L[y]=0$ va fi de forma $y=\overline{y}+y_p$, unde $L[\overline{y}]=0$, iar $L[y_p]=f$ (deci $y_p$ este o soluţe particulară a ecuaţiei diferenţiale $L[y]=f$). Soluţia particulară $y_p$ se poate obţine cu ajutorul metodei lui Lagrange, fiind de forma

$$y_p(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+\ldots+c_n(x)y_n(x),$$

unde $c_1'(x),c_2'(x),\ldots,c_n'(x)$ verifică sistemul

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1(x)+\ldots+c_n'(x)y_n(x)=0\\
&c_1'(x)y_1'(x)+\ldots+c_n'(x)y_n'(x)=0\\
&\vdots\\
&c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=\frac{f(x)}{a_0(x)}
\end{aligned}\tag{3.10}$$

**Exemplul 3.17.** Să se construiască ecuaţiile diferenţiale liniare care admit soluţiile particulare indicate:

a) $y_1=\cos^2 x,\ \ y_2=\sin^2 x$

b) $y_1=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},\ \ y_2=\mathrm{e}^x,\ \ y_3=x\mathrm{e}^x$

*Demonstraţie.* a) Wronskianul este $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos^2 x & \sin^2 x\\ -\sin 2x & \sin 2x\end{vmatrix}=\sin 2x.$
In ipoteza $\sin 2x\neq 0$, ecuaţia căutată va fi

$$W(y_1,y_2,y)=\begin{vmatrix}\cos^2 x & \sin^2 x & y\\ -\sin 2x & \sin 2x & y'\\ -2\cos 2x & 2\cos 2x & y''\end{vmatrix}=0,$$

deci $y''\sin 2x-2y'\cos 2x=0$.

b) Avem $W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\\ \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\neq 0.$
Atunci ecuaţia căutată va fi

$$W(y_1,y_2,y_3,y)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x & y\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x & y'\\ \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x & y''\\ -\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \mathrm{e}^x & 3\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x & y'''\end{vmatrix}=0,$$

deci $2y'''-3y''+y=0$. □

**Exemplul 3.18.** Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei

$$y'' + \frac{1}{x^2 \ln x} y = \mathrm{e}^x \left( \frac{2}{x} + \ln x \right), \quad x > 0,$$

ştiind că o soluţie particulară a ecuaţiei omogene este $y_1 = \ln x$.

*Demonstraţie.* Facem substituţia $y = y_1 \cdot z = \ln x \cdot z$. Derivând succesiv găsim $y' = \frac{1}{x} \cdot z + \ln x$ şi $y'' = -\frac{1}{x^2} z + \frac{1}{x} z' + \frac{1}{x} z' + \ln x \cdot z'' = -\frac{1}{x^2} z + \frac{2}{x} z' + \ln x \cdot z''$. Ecuaţia devine $-\frac{1}{x^2} z + \frac{2}{x} z' + \ln x \cdot z'' + \frac{1}{x^2 \ln x} \cdot \ln x \cdot z = \mathrm{e}^x \left( \frac{2}{x} + \ln x \right)$ sau $\ln x \cdot z'' + \frac{2}{x} z' - \mathrm{e}^x \left( \frac{2}{x} + \ln x \right) = 0$. Pentru a reduce ordinul acestei ecuaţii vom face substituţia $z' = u$ şi ecuaţia devine $u' + \frac{2}{x \cdot \ln x} \cdot u - \mathrm{e}^x \left( \frac{2}{x \cdot \ln x} + 1 \right) = 0$. Aceasta este o ecuaţie liniară de ordinul întâi a cărei soluţie generală este $u(x) = \frac{1}{\ln^2 x} (c_2 + \mathrm{e}^x \cdot \ln^2 x) = \frac{c_2}{\ln^2 x} + \mathrm{e}^x = z' = \frac{dz}{dx}$. Integrând obţinem $z = c_2 \cdot \int \frac{dx}{\ln^2 x} + \mathrm{e}^x + c_1$, deci $y = \ln x \cdot \left( c_2 \cdot \int \frac{dx}{\ln^2 x} + \mathrm{e}^x + c_1 \right)$. □

**Exemplul 3.19.** $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^3 \mathrm{e}^{2x}$

*Demonstraţie.* Ecuaţia omogenă este $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ şi admite soluţia particulară $\overline{y_1}(x) = x$, conform Observaţiei 3.1, punctul 3 şi soluţia particulară $\overline{y_1}(x) = \mathrm{e}^x$, conform Observaţiei 3.1, punctul 2.

Atunci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 x + c_2 \mathrm{e}^x$.

Pentru a determina o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene folosim metoda lui Lagrange şi căutăm soluţia $y_p$ de forma $y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)\mathrm{e}^x$, funcţiile $c_1(x)$ şi $c_2(x)$ determinându-se din sistemul

$$\begin{aligned} c_1'(x)x + c_2'(x)\mathrm{e}^x &= 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)\mathrm{e}^x &= \frac{(x-1)^3 \mathrm{e}^{2x}}{x-1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Din sistemul (3.11) obţinem $c_1'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{2x}$, deci $c_1(x) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x}$ şi $c_2'(x) = (x^2 - x)\mathrm{e}^x$, deci $c_2(x) = 3\mathrm{e}^x - 3x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$.

Aşadar $y_p(x) = \mathrm{e}^{2x} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{9}{4}x + 3 \right)$, iar soluţia generală a ecuaţiei date este $y(x) = c_1 x + c_2 \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{9}{4}x + 3 \right)$. □

**Exemplul 3.20.** $(x^3 - x^2 + 7x + 9)y'' - 4(x^2 - x + 4)y' + (6x - 6)y = 2x^2 - 2x - 16, \ x_0 = 0, \ y_0 = 0, \ y'(0) = 0$

*Demonstraţie.* Căutăm pentru ecuaţia omogenă asociată

$$(x^3 - x^2 + 7x + 9)y'' - 4(x^2 - x + 4)y' + (6x - 6)y = 0$$

o soluţie de forma $\overline{y}_1 = x^2 + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Obţinem

$$n(n-1)x^{n+1} + \ldots - 4nx^{n+1} + \ldots + 6x^{n+1} + \ldots = 0.$$

De aici, prin identificare găsim ecuaţia $n^2-n-4n+6=0$ care are rădăcinile $n_1=2, n_2=3$.

Notând $\overline{y}_1=x^2+a_1x+a_2$ şi $\overline{y}_2=x^3+b_1x^2+b_2x+b_3$ şi punând condiţia sa verifice ecuaţia omogenă obţinem $a_1=0, a_2=3, b_1=0, b_2=3, b_3=-8$. Deci am găsit două soluţii particulare $\overline{y}_1=x^2+3, \overline{y}_2=x^3+3x-8$.

Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este

$$\overline{y}(x)=c_1(x^2+3)+c_2(x^3+3x-8).$$

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $y_p(x)=Ax+B$ şi găsim $A=1, B=0$.

Astfel $y_p(x)=x$ şi $y(x)=c_1(x^2+3)+c_2(x^3+3x-8)+x$.

Impunând condiţiile Cauchy, obţinem sistemul

$$3c_1-8c_2=0$$

$$3c_2+1=0$$

care are soluţia $c_1=-\frac{8}{9}, c_2=-\frac{1}{3}$ şi care determină soluţia particulară căutată $y(x)=-\frac{1}{9}x^2(3x+8)$. □

### 3.2.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul $n$ cu coeficienţi constanţi

**Definiţia 3.6.** O ecuaţie de forma

$$L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x) \tag{3.12}$$

cu $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constante se numeşte **ecuaţii diferenţială liniară de ordinul $n$ cu coeficienţi constanţi**.

Dacă $f(x)\equiv 0$, se spune că ecuaţia (3.4) este **omogenă** , iar dacă $f(x)$ nu este identic nulă , se spune că ecuaţia este **neomogenă** .

**Definiţia 3.7.** Se numeşte **polinomul caracteristic ataşat ecuaţiei omogene** $L[y]=0$, polinomul $F(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\ldots+a_n$, iar $F(r)=0$ se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei $L[y]=0$.

**Teorema 3.2.** *1. Dacă ecuaţia caracteristică $F(r)=0$ are rădăcini reale şi distincte $r_1, r_2, \ldots, r_n$, atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi $L[y]=0$ este*

$$y_1(x)=\mathrm{e}^{r_1x}, y_2(x)=\mathrm{e}^{r_2x}, \ldots, y_n(x)=\mathrm{e}^{r_nx}.$$

*2. Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice $F(r)=0$ există şi rădăcini reale multiple, de exemplu $r_1$ este rădăcină cu ordinul de multiplicitate $p$, atunci ei îi corespund $p$ soluţii liniar independente ale ecuaţiei $L[y]=0$ :*

$$y_1(x)=\mathrm{e}^{r_1x}, y_2(x)=x\mathrm{e}^{r_1x}, \ldots, y_p(x)=x^{p-1}\mathrm{e}^{r_1x}.$$

3. *Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice $F(r) = 0$ există şi rădăcini complexe, de exemplu $r = a + \mathrm{i}b, \overline{r} = a - \mathrm{i}b$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluţii liniar independente*

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos bx, y_2(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin bx.$$

4. *Dacă ecuaţia caracteristică $F(r) = 0$ are printre soluţiile ei rădăcini complexe $r = a + \mathrm{i}b, \overline{r} = a - \mathrm{i}b$ cu ordinul de multiplicitate $p$, atunci lor le corespund $2p$ soluţii liniar independente*

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos bx, y_2(x) = x\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \ldots, y_p(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx$$

$$y_{p+1}(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin bx, y_{p+2}(x) = x\mathrm{e}^{ax}\sin bx, \ldots, y_{2p}(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx.$$

*Demonstraţie.* 1. Verificăm că $y_k(x) = \mathrm{e}^{r_k x}$ este soluţia ecuaţiei $L[y] = 0$ pentru $\forall k = \overline{1,n}$. Avem $L[y_k] = \mathrm{e}^{r_k x}(a_0 r_k^n + a_1 r_k^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$, deoarece $r_k$ este rădăcina ecuaţiei caracteristice. Deci $y_k(x) = \mathrm{e}^{r_k x}$ este soluţia ecuaţiei $L[y] = 0$ pentru $\forall k = \overline{1,n}$.

Soluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental, deoarece wronskianul lor este egal cu produsul dintre $\mathrm{e}^{(r_1+\ldots+r_n)x}$ şi determinantul Vandermonde al numerelor distincte $r_1, \ldots, r_n$ şi deci este diferit de zero. Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene este $y = c_1\mathrm{e}^{r_1 x} + c_2\mathrm{e}^{r_2 x} + \ldots + c_n\mathrm{e}^{r_n x}$.

2. Dacă $r_1$ este rădăcină ecuaţiei caracteristice cu ordinul de multiplicitate $p$, atunci

$$F(r_1) = 0, F'(r_1) = 0, F''(r_1) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(r_1) = 0, F^{(p)}(r_1) \neq 0.$$

Pentru $y = \mathrm{e}^{rx}z$, calculăm derivatele cu ajutorul formulei lui Leibniz şi obţinem

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{e}^{rx}(rz + z') \\ y'' &= \mathrm{e}^{rx}(r^2 z + 2rz + z'') \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \mathrm{e}^{rx}(r^n z + C_n^1 r^{n-1} z' + C_n^2 r^{n-2} z'' + \ldots + C_n^n z^{(n)}), \end{aligned} \tag{3.13}$$

de unde rezultă că $L[\mathrm{e}^{rx}z] = \mathrm{e}^{rx}(b_n z + b_{n-1}z' + \ldots + b_0 z^{(n)})$, unde coeficienţii se determină cu formulele (3.13). Avem

$$b_n = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = F(r)$$

şi în general

$$b_{n-j} = C_n^j r^{n-j} + a_1 C_{n-1}^j r^{n-j-1} + \ldots + a_{n-j} C_j^j = \frac{F^{(j)(r)}}{j!}, \quad j = \overline{1,n}$$

De unde rezultă că

$$L[\mathrm{e}^{rx}z] = \mathrm{e}^{rx}\left[F(r)z + \frac{F'(r)}{1!}z' + \frac{F''(r)}{2!}z'' + \ldots + \frac{F^{(n)(r)}}{n!}z^{(n)}\right]$$

Aşadar, $L[\mathrm{e}^{r_1x}z] = \mathrm{e}^{r_1x}\left[\frac{F^{(p)(r_1)}}{p!}z^{(p)} + \ldots + \frac{F^{(n)(r)}}{n!}z^{(n)}\right]$.

Dacă $z$ este înlocuit cu $1, x, \ldots, x^{p-1}$, paranteza din membrul al doilea este nulă şi, prin urmare, avem

$$L[\mathrm{e}^{r_1x}] = 0, L[\mathrm{e}^{r_2x}] = 0, \ldots, L[\mathrm{e}^{r_nx}] = 0,$$

ceea ce înseamnă că $\mathrm{e}^{r_1x}, x\mathrm{e}^{r_1x}, \ldots, x^{p-1}\mathrm{e}^{r_1x}$ sunt soluţiile ecuaţiei diferenţiale $L[y] = 0$.

Inmulţind aceste soluţii cu constante oarecare şi adunând deducem că la rădăcina $r_1$ cu ordinul de multiplicitate $p$ a ecuaţiei caracteristice corespunde soluţia $y = \mathrm{e}^{r_1x}(c_0x^{p-1} + c_1x^{p-2} + \ldots + c_{p-1})$ ce depinde de $p$ constante oarecare $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$.

3. Fie $r = a + \mathrm{i}b$ rădăcină complexă a ecuaţiei caracteristice. Aceasta înseamnă că funcţia $y = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx} = \mathrm{e}^{ax}\cos bx + \mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ este o soluţie complexă a ecuaţiei $L[y] = 0$. Deoarece $L[\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\sin bx] = 0$ este echivalent cu $L[\mathrm{e}^{ax}\cos bx] + \mathrm{i}L[\mathrm{e}^{ax}\sin bx] = 0$, înseamnă că $L[\mathrm{e}^{ax}\cos bx] = 0$ şi $L[\mathrm{e}^{ax}\sin bx] = 0$, deci $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ şi $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ sunt soluţii ale ecuaţiei $L[y] = 0$ ce corespund oricărei rădăcini complexe $r = a + \mathrm{i}b$ a ecuaţiei caracteristice.

4. Rezultă din 2 şi 3. □

**Exemplul 3.21.** $y'' - y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică este $r^2 - 1 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = 1$. Deci un sistem fundamental de soluţii este $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, y_2(x) = \mathrm{e}^x$, iar soluţia generală va fi $y(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^x$.

Impunem soluţiei şi derivatei ei condiţiile Cauchy date şi obţinem sistemul $c_1 + c_2 = 2,\ -c_1 + c_2 = 0$ care are soluţia $c_1 = c_2 = 1$. Aşadar, soluţia particulară este $y(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$. □

**Exemplul 3.22.** $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică este $r^2 + 2r + 1 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = r_2 = -1$. Deci un sistem fundamental de soluţii este $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, y_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, iar soluţia generală va fi $y(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2x\mathrm{e}^{-x}$.

Impunem soluţiei şi derivatei ei condiţiile Cauchy date şi obţinem $c_1 = 0, c_2 = 1$, deci soluţia particulară este $y(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. □

**Exemplul 3.23.** $y'' + y' + y = 0$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică este $r^2 + r + 1 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci un sistem fundamental de soluţii este $y_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, y_2(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$, iar soluţia generală va fi $y(x) = c_1\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$. □

**Exemplul 3.24.** $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică este $r^4 + r^2 + 1 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = r_2 = -\mathrm{i}, r_3 = r_4 = \mathrm{i}$. Deci un sistem fundamental de soluţii este $y_1(x) = \cos x, y_2(x) = x \cos x, y_3(x) = \sin x, y_4(x) = x \sin x$, iar soluţia generală va fi $y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$ □

**Teorema 3.3.** *Fie $\overline{y}$ soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi şi $y_p$ o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $L[y] = f$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene este $y = \overline{y} + y_p$, $y_p$ putându-se determina întotdeauna prin metoda variaţiei constantelor.*

In anumite cazuri se poate determina forma soluţiei particulare $y_p$ după forma funcţiei $f(x)$. Indicăm în continuare câteva astfel de cazuri:

1. Dacă $f = c$, $F(0) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \frac{c}{a_n}$$

2. Dacă $f = c$, $F(0) = 0, F'(0) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(0) = 0, F^{(p)}(0) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \frac{cx^p}{p!a_{n-p}}$$

3. Dacă $f = c\mathrm{e}^{\alpha x}$, $F(\alpha) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \frac{c\mathrm{e}^{\alpha x}}{F(\alpha)}$$

4. Dacă $f = c\mathrm{e}^{\alpha x}$, $F(\alpha) = 0, F'(\alpha) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(\alpha) = 0, F^{(p)}(\alpha) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \frac{c\mathrm{e}^{\alpha x}x^p}{F^{(p)}(\alpha)}$$
Prin schimbarea de funcţie $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}z(x)$, $z(x)$ fiind noua funcţie necunoscută regăsim cazurile 1,2.

5. Dacă $f = P_m(x)$ şi $F(0) \neq 0$, $P_m(x)$ fiind un polinom în $x$ de grad $m$, atunci
$$y_p(x) = Q_m(x), \text{ unde } Q_m(x) \text{ este un polinom în } x \text{ de grad } m$$

6. Dacă $f = P_m(x)$ şi $F(0) = 0, F'(0) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(0) = 0, F^{(p)}(0) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = x^p Q_m(x)$$

7. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m(x)$ şi $F(\alpha) \neq 0$, $P_m(x)$ fiind un polinom în $x$ de grad $m$, atunci
$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} Q_m(x), \text{ unde } Q_m(x) \text{ este un polinom în } x \text{ de grad } m$$

8. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m(x)$, $F(\alpha) = 0, F'(\alpha) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(\alpha) = 0, F^{(p)}(\alpha) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = x^p \mathrm{e}^{\alpha x} Q_m(x)$$
In cazurile 7 şi 8 punând $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} z(x)$, $z(x)$ fiind noua funcţie necunoscută , regăsim rezultatele de la punctele 5 şi 6.

9. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m^1(x) \cos \beta x + \mathrm{e}^{\alpha x} P_m^2(x) \sin \beta x$, iar $F(\alpha + \mathrm{i}\beta) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} [Q_m^1(x) \cos \beta x + Q_m^1(x) \sin \beta x]$$

10. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m(x)$ şi $\alpha + \mathrm{i}\beta$ este o rădăcină multiplă de ordinul $p$ a lui $F(r)$, atunci
$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} x^p [Q_m^1(x) \cos \beta x + Q_m^1(x) \sin \beta x]$$
Folosind formulele lui Euler
$$\cos \beta x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}}{2} \text{ şi } \sin \beta x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}}{2\mathrm{i}},$$
cazurile 9 şi 10 se reduc la cele de la punctele 7 şi 8.

**Exemplul 3.25.** $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$

*Demonstraţie.* Asociem ecuaţia omogenă $y'' + 3y' + 2y = 0$. Ecuaţia sa caracteristică este $r^2 + 3r + 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = -2$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x}$.

Vom determina o soluţie particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei neomogene cu ajutorul metodei variaţiei constantelor, de forma $y_p(x) = c_1(x)\mathrm{e}^{-x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$.

Sistemul
$$c_1'(x)\mathrm{e}^{-x} + c_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = 0$$
$$-c_1'(x)\mathrm{e}^{-x} - 2c_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$
are soluţia $c_1'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ şi $c_2'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$, de unde deducem
$$c_1(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x), c(x) = -\mathrm{e}^x + \ln(1 + \mathrm{e}^x),$$

deci $y_p(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}) \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

Aşadar, soluţia generală este

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_p(x) =$$

$$= c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}) \ln(1 + \mathrm{e}^x).$$

□

**Exemplul 3.26.** $y'' + y' = 3$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $r^2+r = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 0, r_2 = -1$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x}$. O soluţie particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei neomogene este de forma $y_p(x) = \frac{3x}{1!\cdot 1} = 3x$, deci soluţia generală este

$$y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + 3x.$$

□

**Exemplul 3.27.** $y'' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 + 1 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = \mathrm{i}, r_2 = -\mathrm{i}$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

O soluţie particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei neomogene este de forma

$$y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x),$$

unde $L[y_p^1(x)] = \frac{\mathrm{e}^x}{2}, L[y_p^2(x)] = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$. Deoarece $F(1) \neq 0$, avem $y_p^1(x) = \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{2}}{F(1)} = \frac{\mathrm{e}^x}{4}$. Analog $y_p^2(x) = \frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}}{F(-1)} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4}$.

Deci $y_p(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4} = \frac{\mathrm{ch}x}{2}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\mathrm{ch}x}{2}$. □

**Exemplul 3.28.** $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 4r + 4 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = r_2 = 2$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x}$.

Cum $F(2) = 0, F'(2) = 0, F''(2) = 2 \neq 0$, o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene se caută de forma $y_p(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}x^2}{F''(2)} = \frac{\mathrm{e}^{2x}x^2}{2}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este $y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x} + \frac{\mathrm{e}^{2x}x^2}{2}$. □

**Exemplul 3.29.** $y'' - 9y' + 20y = 4000x^2$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 9r + 20 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 4, r_2 = 5$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{5x}$.

Cum $F(0) \neq 0$, o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene se caută de forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Din $L[ax^2 + bx + c] = 4000x^2$, prin identificarea coeficienţilor, deducem că $a = 200, b = 180, c = 61$, deci

$$y_p(x) = 200x^2 + 180x + 61.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{5x} + 200x^2 + 180x + 61.$$

□

**Exemplul 3.30.** $y'' - 5y' = -5x^2 + 2x,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 5r = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 0, r_2 = 5$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 + c_2 e^{5x}$.

Cum $F(0) = 0, F'(0) = 2 \neq 0$, o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene se caută de forma $y_p(x) = x(ax^2+bx+c)$. Din $L[x(ax^2+bx+c)] = -5x^2+2x$, găsim $a = \frac{1}{3}, b = 0, c = 0$, deci $y_p(x) = \frac{x^3}{3}$.

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $y(x) = c_1 + c_2 e^{5x} + \frac{x^3}{3}$.

Pentru rezolvarea problemei Cauchy calculăm $y'(x) = 5c_2 e^{5x} + x^2$ şi obţinem $0 = y(0) = c_1 + c_2$ şi $0 = y'(0) = 5c_2$, deci $c_1 = c_2 = 0$. Aşadar, soluţia particulară căutată este $y(x) = \frac{x^3}{3}$. □

**Exemplul 3.31.** $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 2$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Cum $F(3) = 2 \neq 0$, o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene se caută de forma $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$. Avem

$$y_p'(x) = 3e^{3x}(ax^2 + bx + c) + e^{3x}(2ax + b)$$

$$y_p''(x) = 9e^{3x}(ax^2 + bx + c) + 6e^{3x}(2ax + b) + e^{3x}2a$$

Inlocuind $y_p, y_p', y_p''$ în ecuaţia neomogenă dată şi identificând coeficientii obţinem $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 1$. Deci $y_p(x) = \frac{x^2-2x+2}{2}$.

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{x^2-2x+2}{2}$.

□

**Exemplul 3.32.** $y'' - y = xe^x + x^3 e^{-x}$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 1 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = -1$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene de forma $y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x)$, unde $L[y_p^1(x)] = x\mathrm{e}^x$ şi $L[y_p^2(x)] = x^3\mathrm{e}^{-x}$.

Cum $F(1) = 0, F'(1) \neq 0$, vom lua $y_p^1(x) = x(ax + b)\mathrm{e}^x$ şi obţinem $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$. Deci $y_p^1(x) = \frac{x^2-x}{4}\mathrm{e}^x$.

Cum $F(-1) = 0, F'(-1) \neq 0$, vom lua $y_p^2(x) = x(cx^3+dx^2+ex+f)\mathrm{e}^{-x}$ şi obţinem $c = -\frac{1}{8}, d = -\frac{1}{4}, e = f = -\frac{3}{8}$. Deci $y_p^2(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{4} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x\right)$.

Atunci $y_p(x) = \frac{x^2-x}{4}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{4} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x\right)$.

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2 - x}{4}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{4} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x\right).$$

□

**Exemplul 3.33.** $y'' - y = x\mathrm{e}^x \sin x$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 1 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = -1$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$.

Pentru a calcula mai uşor pe $y_p(x)$ facem schimbarea de funcţie $y(x) = u(x)\mathrm{e}^x$ şi obţinem $u'' + 2u' = x\sin x$. Pentru această ecuaţie căutăm $u_p(x)$ de forma $u_p(x) = (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x$. Obţinem $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{10}{9}, c = -\frac{2}{3}, d = \frac{14}{9}$ şi $u_p(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{10}{9}\right)\sin x + \left(-\frac{2}{3}x + \frac{14}{9}\right)\cos x$. Soluţia $y_p(x)$ va fi $y_p(x) = u_p(x)\mathrm{e}^x$. Atunci

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{10}{9}\right)\sin x + \left(-\frac{2}{3}x + \frac{14}{9}\right)\cos x\right].$$

□

**Exemplul 3.34.** $y'' - 2y' + 2y = 2\mathrm{e}^x \cos x - 4x\mathrm{e}^x \sin x$

*Demonstraţie.* Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 2r + 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 1 + \mathrm{i}, r_2 = 1 - \mathrm{i}$. Deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}(x) = c_1\mathrm{e}^x \cos x + c_2\mathrm{e}^x \sin x$.

Facem substituţia $y(x) = u(x)\mathrm{e}^x$ şi ecuaţia dată devine

$$L[u] = u'' + u = 2\cos x - 4x\sin x.$$

Căutăm $u_p(x) = u_p^1(x) + u_p^2(x)$, unde $L[u_p^1(x)] = 2\cos x$ şi $L[u_p^2(x)] = -4x\sin x$.

Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene în $u$ este $r^2+1 = 0$ şi are rădăcinile simple $r_1 = \mathrm{i}, r_2 = -\mathrm{i}$. Atunci căutăm $u_p^1(x) = x(a\cos x + b\sin x)$

şi $u_p^2(x) = x[(cx+d)\cos x+(ex+f)\sin x]$. Introducând în ecuaţia neomogenă în $u$ determinăm coeficienţii $a = c = 1, b = d = e = f = 0$, deci $u_p(x) = x^2\cos x$ şi $y_p(x) = x^2\cos x\mathrm{e}^x$. Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei date este $y(x) = c_1\mathrm{e}^x\cos x + c_2\mathrm{e}^x\sin x + x^2\cos x\mathrm{e}^x$. □

## 3.3 Aplicaţii

### 3.3.1 Ecuaţii Euler

**Definiţia 3.8.** Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul $n$ de forma

$$L[y] = a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x) \tag{3.14}$$

cu $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constante şi $f \in \mathcal{C}^1(I)$ se numeşte **ecuaţie Euler**.

Dacă $f(x) \equiv 0$, ecuaţia (3.14) se numeşte **omogenă** , iar dacă $f(x) \neq 0$, ecuaţia (3.14) se numeşte **neomogenă** .

O ecuaţie Euler se poate transforma într-o ecuţie cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabilă $|x| = \mathrm{e}^t$. Vom analiza cazul $x > 0$, cazul $x < 0$ tratându-se analog. Avem :

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = y'(t)\cdot\mathrm{e}^{-t}$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{d(y'(t)\cdot\mathrm{e}^{-t})}{dt} = \mathrm{e}^{-2t}\cdot(y''(t)-y'(t))$$

Derivata de ordinul $k$ va fi

$$y^{(k)} = \mathrm{e}^{-kt}\left(y^{(k)}(t) + \alpha_1y^{(k-1)}(t) + \ldots + \alpha_{k-1}y'(t)\right),$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ sunt constante.

**Exemplul 3.35.** $x^2y'' - xy' + y = x$

*Demonstraţie.* Cu substituţia de mai sus, ecuaţia devine

$$\mathrm{e}^{2t}\cdot\mathrm{e}^{-2t}\cdot(y''(t)-y'(t))-\mathrm{e}^t\cdot y'(t)\cdot\mathrm{e}^{-t}+y(t) = \mathrm{e}^t \text{ sau } y''(t)-2y'(t)+y(t) = \mathrm{e}^t$$

Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$ este $F(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = r_2 = 1$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t$.

O soluţie particulară a ecuaţiei neomogene în $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t$ este de forma $y_p(t) = \frac{t^2\mathrm{e}^t}{F''(1)} = \frac{t^2\mathrm{e}^t}{2}$.

Deci $y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t + \frac{t^2\mathrm{e}^t}{2}$ şi $y(x) = c_1x + c_2x\ln x + \frac{x\ln^2 x}{2}$. □

### 3.3.2 Metoda eliminării pentru sisteme diferenţiale liniare

Metoda derivării şi eliminării permite reducerea sistemelor de ordinul I la ecuaţii de ordin superior.

**Exemplul 3.36.**

$$tx' - x - 3y = t$$
$$ty' - x + y = 0$$

*Demonstraţie.* Pentru a reduce sistemul la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi trebuie să facem schimbarea de variabilă independentă $t = \mathrm{e}^{\tau}$. Vom avea $dt = \mathrm{e}^{\tau} d\tau$; $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\tau}} = \frac{1}{t}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{d\tau}$; $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{d\tau}$. Sistemul devine

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\tau} - x - 3y = \mathrm{e}^{\tau} \\ &\frac{dy}{d\tau} - x + y = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Vom deriva în raport cu $\tau$ prima ecuaţie şi obţinem

$$x'' - x' - 3y' = \mathrm{e}^{\tau}. \tag{3.16}$$

Din ecuaţia a doua a sistemului avem $y' = x - y$. Introducând expresia lui $y'$ în ecuaţia (3.16), obţinem

$$x'' - x' - 3x + 3y = \mathrm{e}^{\tau}. \tag{3.17}$$

Din prima ecuaţie a sistemului (3.15) avem

$$3y = x' - x - \mathrm{e}^{\tau}. \tag{3.18}$$

Introducând expresia lui $y$ din (3.18), ecuaţia (3.17) devine

$$x'' - x' - 3x + x' - x - \mathrm{e}^{\tau} = \mathrm{e}^{\tau} \text{ sau } x'' - 4x = 2\mathrm{e}^{\tau}.$$

Această ecuaţie cu coeficienţi constanţi este echivalentă cu sistemul (3.15). Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2 - 4 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 2, r_2 = -2$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$\overline{x}(\tau) = c_1 \mathrm{e}^{2\tau} + c_2 \mathrm{e}^{-2\tau}.$$

O soluţie particulară a ecuaţiei neomogene este de forma

$$x_p(\tau) = \frac{2\mathrm{e}^{\tau}}{F(1)} = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\tau}.$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$x(\tau) = c_1 \mathrm{e}^{2\tau} + c_2 \mathrm{e}^{-2\tau} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{\tau}.$$

Revenind la variabila $t$ avem $x(t) = c_1t^2 + c_2t^{-2} - \frac{2}{3}t$. Din ecuaţia (3.18) determinăm $y$:

$$y = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{dx}{d\tau} - x - \mathrm{e}^{\tau} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( t \cdot \frac{dx}{dt} - x - t \right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left( 2c_1t^2 - 2c_2t^{-2} - \frac{2}{3}t - c_1t^2 - c_2t^{-2} + \frac{2}{3}t - t \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( c_1t^2 - 3c_2t^{-2} - t \right)$$

□

**Exemplul 3.37.**

$$x' + 5x + y = 7\mathrm{e}^t - 27$$
$$y' - 2x + 3y = -3\mathrm{e}^t + 12$$

*Demonstraţie.* Din prima ecuaţie scoatem $y$ şi derivăm :

$$y = 7\mathrm{e}^t - 27 - 5x - x'; y' = 7\mathrm{e}^t - 5 - x''.$$

Inlocuim în a doua ecuaţie a sistemului şi obţinem

$$x'' + 8x' + 17x = 31\mathrm{e}^t - 93.$$

Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $F(r) = r^2+8r+17 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = -4+\mathrm{i}, r_2 = -4-\mathrm{i}$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{x}(t) = \mathrm{e}^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene cu ajutorul metodei lui Lagrange, de forma $x_p(t) = \mathrm{e}^{-4t}(c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t)$. Funcţiile $c_1(t)$ şi $c_2(t)$ le determinăm din sistemul :

$$c_1'(t) \cos t\mathrm{e}^{-4t} + c_2'(t) \sin t\mathrm{e}^{-4t} = 0$$

$$c_1'(t)(-\sin t\mathrm{e}^{-4t} - 4\cos t\mathrm{e}^{-4t}) + c_2'(t)(\cos t\mathrm{e}^{-4t} - 4\sin t\mathrm{e}^{-4t}) = 31\mathrm{e}^t - 93$$

Obţinem $c_1'(t) = -31 \sin t\mathrm{e}^{5t} + 93 \sin t\mathrm{e}^{4t}$ şi $c_2'(t) = 31 \cos t\mathrm{e}^{5t} - 93 \cos t\mathrm{e}^{4t}$.
Atunci

$$c_1(t) = -\frac{31}{26}\mathrm{e}^{5t}(5 \sin t - \cos t) + \frac{93}{17}\mathrm{e}^{4t}(4 \sin t - \cos t),$$

$$c_2(t) = \frac{31}{26}\mathrm{e}^{5t}(5 \sin t + \cos t) - \frac{93}{17}\mathrm{e}^{4t}(4 \sin t + \cos t).$$

Deci $x(t) = \mathrm{e}^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{31}{26}\mathrm{e}^t - \frac{93}{17}$.
Rezultă $y(t) = \mathrm{e}^{-4t}[(c_1 - c_2) \sin t - (c_1(t) - c_2) \cos t) - \frac{2}{13}\mathrm{e}^t + \frac{6}{17}$. □

**Exemplul 3.38.**

$$y_1' = -y_2 + 1$$
$$x^2y_2' = -2y_1 + x^2 \ln x$$

*Demonstraţie.* Derivăm prima ecuaţie şi obţinem $y_2' = -y_1''$. Inlocuind în a doua ecuaţie obţinem $x^2y_1'' - 2y_1 = -x^2 \ln x$ care este o ecuaţie Euler.

Ecuaţia omogenă ataşată este $x^2y_1'' - 2y_1 = 0$. Facem schimbarea $x = \mathrm{e}^t$ şi obţinem $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$. Ecuaţia caracteristică asociată este $r^2 - r - 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 2, r_2 = -1$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $\overline{y}_1(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-t}$ şi $\overline{y}_1(x) = c_1x^2 + c_2\frac{1}{x}$. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene cu metoda lui Lagrange, de forma :

$$y_{1p}(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)\frac{1}{x}$$

şi determinăm funcţiile $c_1(x), c_2(x)$ din sistemul :

$$c_1'(x)x^2 + c_2'(x)\frac{1}{x} = 0$$

$$2xc_1'(x) - c_2'(x)\frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 \ln x}{x^2} = -\ln x$$

Atunci $c_1'(x) = -\frac{\ln x}{3x^3}, c_2'(x) = \frac{\ln x}{3}$. Deci $c_1(x) = \frac{1}{6x^2}\ln x + \frac{1}{6x}\ln x + \frac{1}{6x}$, $c_2(x) = \frac{1}{3}(x \ln x - x)$.

Atunci $y_{1p}(x) = \frac{1}{6}x \ln x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$.

Avem $y_1(x) = c_1x^2 + c_2\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x \ln x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$.

Din prima ecuaţie avem $y_2(x) = 1 - y_1' = \frac{1}{6}\ln x - 2c_1x - c_2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{2}{3}$. □

# Capitolul 4

# Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

## 4.1 Integrale prime pentru sisteme diferenţiale

**Definiţia 4.1.** Un sistem diferenţial de forma

$$x_j' = v_j(x_1, \ldots, x_n), \;\; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.1}$$

unde $v = (v_1, \ldots, v_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este un câmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^r$ $(r \geq 1)$ definit într-un domeniu $U \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **sistem diferenţial autonom**.

Sistemul (4.1) se poate scrie şi "sub formă simetrică " astfel

$$\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} (= dt)$$

Câmpul $v$ asociază fiecărui punct $x \in U$ un vector tangent $v(x) \in T_x U \simeq \mathbb{R}^n$. Dacă $f \colon U \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1(U)$, atunci pentru orice $x \in U$ se poate considera **derivata lui $f$ în punctul $x$ şi în direcţia vectorului** $v(x)$, notată $\frac{df}{dv}(x)$ şi definită prin $\frac{df}{dv}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i(x)$ (aşa cum se ştie de la cursul de analiză ).

**Definiţia 4.2.** Fie $v \colon U \to \mathbb{R}^n$ un câmp de vectori şi $f \colon U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1(U)$. Funcţia $f$ se numeşte o **integrală primă a sistemului diferenţial** $x' = v(x), \;\; x \in U$, dacă derivata sa în direcţia câmpului de vectori $v$ este nulă în fiecare punct din $U$, adică $\frac{df}{dv} = 0$.

Proprietatea unei funcţii $f$ de a fi integrală primă se poate enunţa echivalent şi astfel : o funcţie diferenţiabilă $f \colon U \to \mathbb{R}$ este o integrală primă pentru sistemul diferenţial autonom $x' = v(x)$ dacă şi numai dacă oricare ar fi soluţia $x = \varphi(t)$, $\varphi \colon I \to U$, funcţia $f \circ \varphi$ este constantă pe $I$. Intr-adevăr, $\forall t \in I$, $\frac{d\varphi}{dt} = v(\varphi(t))$ şi

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\varphi(t_0)} \cdot \frac{d\varphi_i}{dt}|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\varphi(t_0)} \cdot v^i(\varphi(t_0)) = \frac{df}{dv}(\varphi(t_0)).$$

Uneori se mai scrie $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ constant. De aceea se mai spune că integralele prime reprezintă **legi de conservare**.

In exerciţii, pentru determinarea integralelor prime ale unor sisteme concrete se recomandă scrierea lor sub forma simetrică $\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n}$ şi găsirea (prin aplicarea proprietăţilor rapoartelor egale) unui raport de forma $\frac{df}{0}$ egal cu rapoartele precedente. Atunci $f$ va fi o integrală primă , deoarece $df = 0$, deci $f$=constant în lungul curbelor integrale.

**Exemplul 4.1.** Să se găsească integrale prime ale sistemului simetric :

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

*Demonstraţie.* Folosind proprietăţile proporţiilor, putem scrie sistemul dat astfel :

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{z-x+x-z+y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

şi

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{xdx+ydy+zdz}{x(z-x)+y(x-z)+z(y-x)} = \frac{xdx+ydy+zdz}{0}$$

De aici rezultă două ecuaţii diferenţiale, dacă egalăm cu zero numărătorii ultimelor rapoarte din cele două şiruri de rapoarte egale :

$$dx+dy+dz = 0 \quad \text{şi} \quad xdx+ydy+zdz = 0$$

Ele ne dau două integrale prime $x+y+z = c_1$ şi $x^2+y^2+z^2 = c_2$. □

In general, pentru un sistem diferenţial autonom pot să nu existe integrale prime globale, adică definite pe întreg domeniul $U \subset \mathbb{R}^n$. Există însă integrale prime locale (adică definite într-o vecinătate a oricărui punct $x_0 \in U$), fapt enunţat în teorema următoare; demonstraţia poate fi găsită în [5], pg. 305.

**Teorema 4.1.** *Fie $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ un câmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^r(U)$ ($r \geq 2$)pe domeniul $U \subset \mathbb{R}^n$ şi fie $x_0 \in U$ un punct nesingular al câmpului ($v(x_0) \neq 0$). Atunci există o vecinătate $W$ a lui $x_0$ în $U$ astfel încât sistemul diferenţial autonom $x' = v(x)$, $x \in W$ are, în domeniul $W$, $n-1$ integrale prime funcţional independente $f_1, \ldots, f_{n-1}$ şi orice integrală primă a sistemului în domeniul $W$ este funcţie de $f_1, \ldots, f_{n-1}$.*

**Observaţia 4.1.** Pentru sistemele diferenţiale neautonome $x' = v(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in U$, o funcţie $f\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă va fi **integrală primă dependentă de timp** dacă ea este integrală primă pentru sistemul autonom care se obţine din sistemul precedent prin adăugarea ecuaţiei $t' = 1$:

$$X' = V(X), \quad X \in U \times \mathbb{R}, \quad X = (x,t), \quad V(X) = (v(x,t), 1).$$

Câmpul de vectori $V$ nu se anulează şi i se poate aplica Teorema 4.1.

## 4.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

**Definiţia 4.3.** Fie $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ un câmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^r(U)$ $(r \geq 2)$ şi $v_1, \ldots, v_n\colon U \to \mathbb{R}$ componentele sale. Se numeşte **ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară omogenă** pentru funcţia necunoscută $u\colon U \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$, egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \;\; x = (x_1, \ldots, x_n) \in U \tag{4.2}$$

**Definiţia 4.4.** Funcţia $u\colon U \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ care verifică relaţia (4.2) pentru $\forall x \in U$ se numeşte **soluţie** a ecuaţiei (4.2) pe domeniul $U$.

**Teorema 4.2.** *Orice integrală primă pe $U$ a sistemului autonom $x' = v(x)$ este soluţie pe $U$ a ecuaţiei (4.2) şi, reciproc, orice soluţie pe $U$ a ecuaţiei (4.2) este integrală primă pe $U$ a sistemului $x' = v(x)$.*

*Demonstraţie.* Fie $u\colon U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ care este integrală primă a sistemului diferenţial $x' = v(x)$, $x \in U$.

Atunci $0 = \frac{du}{dv}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v_i(x), \forall x \in U$, deci funcţia $u$ este soluţie a ecuaţiei (4.2).

Reciproc, fie $u\colon U \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei (4.2) şi fie $\varphi\colon I \to U$ o soluţie oarecare a sistemului diferenţial $x' = v(x)$. Pentru $\forall t \in I$ avem din (4.2) :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(\varphi(t)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t)) = 0.$$

Dar $\frac{d\varphi}{dt} = v(\varphi(t))$, deci rezultă $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{d\varphi_i}{dt} = 0, \forall t \in I$ sau echivalent $\frac{d(u \circ \varphi)}{dt} = 0$, $\forall t \in I$, adică $u \circ \varphi =$ constantă pe $I$, deci funcţia $u$ este integrală primă a sistemului autonom. □

**Observaţia 4.2.** Sistemul diferenţial autonom

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n(x_1, \ldots, x_n)}$$

se numeşte **sistemul caracteristic** asociat ecuaţiei (4.2).

**Exemplul 4.2.** $xy\frac{\partial u}{\partial x} - y\sqrt{1-y^2}\frac{\partial u}{\partial y} + (z\sqrt{1-y^2} - axy)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

*Demonstraţie.* Sistemul caracteristic asociat este

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y\sqrt{1-y^2}} = \frac{dz}{z\sqrt{1-y^2} - axy}$$

Din primele două rapoarte obţinem $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-\sqrt{1-y^2}}$ şi integrând avem

$$\ln|x| + \arcsin y = c,$$

deci $x\mathrm{e}^{\arcsin y} = c_1$. Din $\frac{dy}{-y\sqrt{1-y^2}} = \frac{dz}{z\sqrt{1-y^2}-axy}$ şi din prima integrală primă obţinută avem

$$\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = ac_1\frac{\mathrm{e}^{-\arcsin y}}{\sqrt{1-y^2}}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară în $z$. Atunci soluţia sa generală este $z = \frac{c_2}{y} \cdot \frac{ac_1\mathrm{e}^{-\arcsin y}}{2y}(y + \sqrt{1-y^2})$ sau $2yz + ax(y + \sqrt{1-y^2}) = 2c_2$, care este cea de-a doua integrală primă .

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$u(x,y,z) = \Phi(x\mathrm{e}^{\arcsin y}, 2yz + ax(y + \sqrt{1-y^2})), \Phi \in \mathcal{C}^1.$$

□

**Definiţia 4.5.** Se numeşte **ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară** egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = g(x_1,\ldots,x_n,u), \tag{4.3}$$

unde $g_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

**Definiţia 4.6.** Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei (4.3) orice funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ definită pe un domeniu $U \subset \mathbb{R}^n$, $u\colon U \to \mathbb{R}$ astfel încât $\forall x \in U$ să avem $(x, u(x)) \in D$ şi $\sum_{i=1}^{n} g_i(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i})(x) = g(x,u(x)),\ \ \forall x \in U$.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (4.3) vom proceda astfel: căutăm soluţia $u$ sub formă implicită $F(x_1,\ldots,x_n,u) = 0$, unde $F\colon D \to \mathbb{R}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ pe $D$. Atunci rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial u}},\ \ i = 1,\ldots,n$$

şi ecuaţia (4.3) devine

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n,u) + g(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial F}{\partial u}(x_1,\ldots,x_n,u) = 0,$$

adică o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară omogenă , care se poate rezolva ca mai înainte.

**Exemplul 4.3.** $(1 + \sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$

*Demonstraţie.* Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

Din ultimele două rapoarte rezultă $z-2y=c_1$ o integrală primă .

Folosind proprietăţile rapoartelor egale avem

$$dy=\frac{dz-dx-dy}{-\sqrt{z-x-y}},$$

de unde rezultă $y+2\sqrt{z-x-y}=c_2$ o altă integrală primă .

Deci soluţia generală sub formă implicită este

$$\Phi(z-2y,y+2\sqrt{z-x-y})=0.$$

□

**Definiţia 4.7.** Fie $U\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu şi $\overline{v}\colon U\to\mathbb{R}$ un câmp de clasă $\mathcal{C}^1$ fără puncte singulare pe $U$ ($\overline{v}$ nu se anulează pe $U$), unde

$$\overline{v}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}.$$

Orbitele soluţiilor sistemului diferenţial autonom

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)},\ \ (x,y,z)\in U \tag{4.4}$$

se numesc **linii de câmp** pentru $\overline{v}$.

Liniile de câmp ale unui câmp vectorial $\overline{v}$ sunt suporturi de curbe $\gamma$ : $x=x(t),t\in I$, în lungul cărora vectorul tangent în fiecare punct $t$ coincide cu $\overline{v}(x(t))$. In unele cazuri concrete (de exemplu, câmpul electromagnetic), liniile de câmp sunt numite şi **linii de forţă** .

**Exemplul 4.4.** Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\overline{v}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2z}\overline{i}-\frac{2y}{xz}\overline{j}+\frac{-x^2+y^2-z^2}{xz^2}.$$

*Demonstraţie.* Sistemul simetric asociat este

$$\frac{x^2zdx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{xzdy}{-2y}=\frac{xz^2dz}{-x^2+y^2-z^2}$$

echivalent cu

$$\frac{2xdx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{-dy}{y}=\frac{2zdz}{-x^2+y^2-z^2}$$

sau

$$\frac{2xdx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2ydy}{-2y^2}=\frac{2zdz}{-x^2+y^2-z^2}=$$

$$= \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2 - 2y^2 - x^2 + y^2 - z^2} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{0}$$

Deci $2xdx+2ydy+2zdz = 0$. Atunci o integrală primă este $x^2+y^2+z^2 = c_1$.

Primele două rapoarte $\frac{2xdx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2ydy}{-2y^2}$, pe baza integralei prime aflate ne dau $\frac{2xdx}{c_1^2} = -\frac{dy}{y}$, deci $y = c_2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{c_1^2}}$.

Liniile de câmp au ecuaţiile

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1$$

$$y = c_2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{c_1^2}}$$

şi sunt curbe situate pe sfera de rază $c_1$ şi centru 0. □

**Definiţia 4.8.** O suprafaţă $S \subset U$ de clasă $\mathcal{C}^1$, fără puncte singulare (adică cu plan tangent în fiecare punct) se numeşte **suprafaţă de câmp** pentru $\overline{v}$ dacă în orice punct $P \in S$, vectorul $\overline{v}(M)$ este tangent suprafeţei.

**Observaţia 4.3.** Fie $S$ dată de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ în $U$, unde $F\colon U \to \mathbb{R}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$. Deoarece $S$ nu are puncte singulare are normală în orice punct $M \in S$ şi un vector director al normalei în $P$ este dat de

$$\mathrm{grad}_M F = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\overline{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\overline{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(M)\overline{k} \neq \overline{0}$$

Atunci $\overline{v}(M)$ este tangent la $S$ dacă şi numai dacă $\overline{v}(M)$ este ortogonal vectorului $\mathrm{grad}_M F$, adică dacă şi numai dacă are loc egalitatea

$$\overline{v}(M) \cdot \mathrm{grad}_M F = P(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (4.5)$$

pentru $\forall M = (x, y, z)$. Rezultă că $S$ este o suprafaţă de câmp pentru $\overline{v}$ dacă şi numai dacă este dată de o ecuaţie $F(x, y, z) = 0$, unde funcţia $F\colon U \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^1$, cu $\mathrm{grad}F \neq \overline{0}$, este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară (4.5), numită **ecuaţia suprafeţelor de câmp** ale lui $\overline{v}$.

Sistemul diferenţial (4.4) se mai numeşte şi **sistem caracteristic** al ecuaţiei (4.5), iar liniile de câmp se mai numesc şi **curbe caracteristice**.

Determinarea unei suprafeţe de câmp care trece printr-o curbă dată $\Gamma \subset U$ de ecuaţii $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in U$ se numeşte **problemă Cauchy** pentru ecuaţia (4.5).

Fie $f_1, f_2\colon U \to \mathbb{R}$ două integrale prime funcţional independente pentru sistemul (4.4). Dacă $\varphi\colon I \to U$ este o soluţie a sistemului, atunci orice punct $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ al liniei de câmp corespunzătoare verifică relaţiile

$$f_1(x(t), y(t), z(t)) = c_1, f_2(x(t), y(t), z(t)) = c_2 \ \text{ cu } \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aplicând teorema funcţiilor implicite sistemului $f_1(x,y,z)=c_1, f_2(x,y,z)=c_2$ rezultă că , cel puţin local, orice linie de câmp este dată de ecuaţiile $f_1(x,y,z)=c_1, f_2(x,y,z)=c_2$. Dacă $\Gamma$ nu este o linie de câmp, atunci ea va intersecta o linie de câmp dacă şi numai dacă constantele $c_1, c_2$ verifică o relaţie de compatibilitate $\Phi(c_1,c_2)=0$ ($\Phi$ funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$), obţinută din sistemul algebric $\varphi_1=\varphi_2=0, f_1=c_1, f_2=c_2$.

Suprafaţa dată de ecuaţia $\Phi(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z))=0$ este (conform Teoremei 4.2) o suprafaţă de câmp ce trece prin curba $\Gamma$.

Dacă $\Gamma$ este o linie de câmp ea este dată , cel puţin local, de ecuaţii de forma $f_1(x,y,z)=c_1, f_2(x,y,z)=c_2$, deci există o infinitate de suprafeţe de câmp $\alpha(f_1(x,y,z)-c_1)+\beta(f_2(x,y,z)-c_2)=0, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ care trec prin $\Gamma$, adică problema Cauchy pentru curbe caracteristice este nedeterminată .

**Exemplul 4.5.** Să se determine soluţia ecuaţiei $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ ce trece prin curba $x^2+y^2=1, z=2$.

*Demonstraţie.* Sistemul caracteristic asociat este $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. Integralele prime se obţin din egalarea primelor două rapoarte şi a ultimelor două : $\frac{x}{y}=c_1, \frac{x}{z}=c_2$.

Din sistemul $\frac{x}{y}=c_1, \frac{x}{z}=c_2, x^2+y^2=1, z=2$ eliminăm variabilele $x,y,z$ şi obţinem $c_1^2c_2^2+c_2^2=\frac{c_1^2}{4}$ şi revenind avem $\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2}{z^2}\cdot\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}=\frac{x^2}{4y^2}$ sau $x^2+y^2=\frac{z^2}{4}$ (con cu vârful în origine). □

**Exemplul 4.6.** Se dă câmpul vectorial $\overline{v}=(x+y)\overline{i}+(y-x)\overline{j}-2z\overline{k}$. Să se determine:

a) liniile de câmp;

b) linia de câmp ce trece prin punctul $M(1,0,1)$;

c) suprafaţa de câmp;

d) suprafaţa de câmp ce conţine dreapta $z=1, y-\sqrt{3}x=0$.

*Demonstraţie.* a) Sistemul caracteristic asociat este $\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{y-x}=\frac{dz}{-2z}$. Rezultă $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{-2z}$, deci $\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{z}$. Atunci $(x^2+y^2)z=c_1$ este o integrală primă .

Din primele două rapoarte obţinem $\frac{dx}{dy}=\frac{x+y}{y-x}$, care este o ecuaţie diferenţială omogenă şi facem substituţia $y=tx$. Avem $x\frac{dt}{dx}+t=\frac{t-1}{t+1}$ sau $x\frac{dt}{dx}=-\frac{1+t^2}{t+1}$ sau $\frac{dx}{x}=-\frac{t+1}{t^2+1}dt$, care are soluţia $\ln(x^2+y^2)+2\text{arctg}\,\frac{y}{x}=c_2$, fiind cea de-a doua integrală primă .

Liniile de câmp sunt

$$(x^2+y^2)z=c_1$$

$$\ln(x^2+y^2)+2\text{arctg}\,\frac{y}{x}=c_2$$

b) Cum $M(1,0,1)$ aparţine liniei de câmp, din sistemul de mai sus aflăm constantele $c_1,c_2$ : $c_1=0, c_2=0$. Deci linia de câmp ce trece prin punctul

$M(1,0,1)$ este

$$(x^2+y^2)z=0$$

$$\ln(x^2+y^2)+2\text{arctg}\,\frac{y}{x}=0$$

c) Ecuaţia suprafeţei de câmp este

$$\Phi((x^2+y^2)z,\ln(x^2+y^2)+2\text{arctg}\,\frac{y}{x})=0.$$

d) Suprafaţa de câmp ce conţine dreapta $z=1, y-\sqrt{3}x=0$ rezultă din eliminarea variabilelor $x,y,z$ din sistemul

$$(x^2+y^2)z=c_1$$

$$\ln(x^2+y^2)+2\text{arctg}\,\frac{y}{x}=c_2$$

$$z=1$$

$$y-\sqrt{3}x=0$$

şi se obţine $\ln c_1+2\text{arctg}\,\sqrt{3}=c_2$, deci $z=\text{e}^{\text{arctg}\,\frac{y}{x}-\frac{\pi}{3}}$ este ecuaţia suprafeţei de câmp ce trece prin dreapta dată . □

# Capitolul 5

# Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi

## 5.1 Clasificarea si aducerea la forma canonică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul doi

**Definiţia 5.1.** Se numeşte **ecuaţie cvasiliniară cu derivate parţiale de ordinul II** (cu două variabile independente) o ecuaţie de forma

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \quad (5.1)$$

unde $A, B, C$ sunt funcţii reale continue pe un deschis din $\mathbb{R}^2$ şi funcţia $D$ este continuă în argumentele ei.

**Definiţia 5.2.** Se numesc **curbe caracteristice** pentru ecuaţia (5.1), curbele aflate pe suprafaţele integrale ale acestei ecuaţii, ale căror proiecţii în planul $xOy$ verifică ecuaţia caracteristică :

$$A(x,y)dy^2-2B(x,y)dxdy+C(x,y)dx^2=0 \quad (5.2)$$

Clasificare:

1) Dacă $B^2-AC>0$, cele două familii de caracteristice sunt reale şi distincte şi ecuaţia este de **tip hiperbolic**.

2) Dacă $B^2-AC=0$, avem o singură familie de caracteristice reale şi ecuaţia este de **tip parabolic**.

3) Dacă $B^2-AC<0$, cele două familii de caracteristice sunt complex conjugate şi ecuaţia este de **tip eliptic**.

**Exemple clasice**

1. Ecuaţia omogenă a **coardei vibrante** sau ecuaţia **undelor plane**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\ \ a^2=\frac{\rho}{T_0}, \quad (5.3)$$

unde $\rho$ este masa specifică liniară a coardei, $T_0$ este tensiunea la care e supusă coarda în poziţia de repaus este o ecuaţie de tip hiperbolic.

2. **Ecuaţia căldurii**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \ a^2 = \frac{k}{c\rho}, \tag{5.4}$$

unde $k$ este coeficientul de conductibilitate termică , $c$ căldura specifică $\rho$ densitatea este o ecuaţie de tip parabolic.

3. **Ecuaţia Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.5}$$

este o ecuaţie de tip eliptic.

**Definiţia 5.3.** Direcţiile

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x, y), \frac{dy}{dx} = \mu_2(x, y) \tag{5.6}$$

determinate de ecuaţia (5.2) se numesc **direcţii caracteristice** ale ecuaţiei (5.1).

Prin integrarea ecuaţiilor (5.6) se obţin două familii de curbe în planul $xOy$, $\varphi_1(x, y) = c_1, \varphi_2(x, y) = c_2$ ($c_1, c_2$constante arbitrare), curbe care sunt proiecţiile pe planul $xOy$ ale curbelor caracteristice.

Dacă ecuaţia este de tip hiperbolic, cu schimbarea de variabile $\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \varphi_2(x, y)$, ecuaţia (5.1) se aduce la prima formă canonică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + G_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{5.7}$$

Dacă se efectuează acum transformarea $\xi = x + y, \eta = x - y$, din ecuaţia (5.7) rezultă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + G_1'\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{5.8}$$

care este a doua formă canonică pentru ecuaţia cvasiliniară de tip hiperbolic.

Dacă ecuaţia este de tip parabolic, $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = \varphi(x, y)$, cu schimbarea de variabile $\xi = \varphi(x, y), \eta = x$, ajungem la forma canonică a ecuaţiei (5.1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + G_2\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{5.9}$$

Dacă ecuaţia este de tip eliptic, funcţiile $\varphi_1(x, y)$ şi $\varphi_2(x, y)$ sunt complex conjugate şi notăm $\alpha(x, y) = \mathrm{Re}\varphi_1(x, y), \beta(x, y) = \mathrm{Im}\varphi_1(x, y)$. Cu

schimbarea de variabile $\xi = \alpha(x,y), \eta = \beta(x,y)$ se ajunge la forma canonică a ecuaţiei (5.1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + G_3\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{5.10}$$

In cazul ecuaţiilor liniare şi omogene în raport cu derivatele parţiale de ordinul II cu coeficienţi constanţi

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{5.11}$$

$A, B, C$ constante, ecuaţia diferenţială a proiecţiilor curbelor caracteristice pe planul $xOy$ este

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0. \tag{5.12}$$

Direcţiile caracteristice sunt

$$dy - \mu_1 dx = 0, dy - \mu_2 dx = 0 \tag{5.13}$$

şi ne dau $y - \mu_1 x = c_1, y - \mu_2 x = c_2$, $c_1, c_2$ constante.

Dacă ecuaţia este de tip hiperbolic, cu schimbarea de variabile

$$\xi = y - \mu_1 x, \eta = y - \mu_2 x,$$

ecuaţia (5.11) devine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{5.14}$$

cu soluţia generală $z = f(\xi) + g(\eta)$, unde $f, g$ sunt funcţii arbitrare. Revenind la vechile variabile $z(x,y) = f(y - \mu_1 x) + g(y - \mu_2 x)$

Dacă ecuaţia este de tip parabolic, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{B}{A}$ şi ecuaţia (5.12) se reduce la $Ady - Bdx = 0$, cu integrala generală $Ay - Bx = c$, $c$ constantă Schimbarea de variabile $\xi = Ax - By, \eta = x$ aduce ecuaţia (5.11) la forma canonică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0 \tag{5.15}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (5.15) este $z = \eta f(\xi) + g(\xi)$, unde $f, g$ sunt funcţii arbitrare.

Dacă ecuaţia este de tip eliptic, forma sa canonică este ecuaţia Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0 \tag{5.16}$$

**Exemplul 5.1.** Să se aducă la forma canonică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

*Demonstraţie.* $A = 1, B = 1, C = -3 \Longrightarrow B^2 - AC = 4 > 0$, deci ecuaţia este de tip hiperbolic

Ecuaţia caracteristică este :

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 3, \frac{dy}{dx} = -1 \Longrightarrow y - 3x = c_1, y + x = c_2$

Facem schimbarea de variabile $\xi = y - 3x, \eta = y + x$ şi obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Forma canonică este :

$$-16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 8\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

□

**Exemplul 5.2.** Să se aducă la forma canonică ecuaţia

$$(1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

*Demonstraţie.* $B^2 - AC = -(1 + x^2)(1 + y^2) < 0$, deci ecuaţia este de tip eliptic

Din ecuaţia caracteristică

$$(1 + x^2)dy^2 + (1 + y^2)dx^2 = 0$$

rezultă

$$\sqrt{1 + x^2}dy = \pm \mathrm{i}\sqrt{1 + y^2}dx,$$

deci familiile de caracteristice sunt

$$\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) + \mathrm{i}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = c_1,$$

$$\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) - \mathrm{i}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = c_2$$

Facem schimbarea de variabile $\xi = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}), \eta = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ şi obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

Ecuaţia se reduce la forma canonică $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$. □

**Exemplul 5.3.** Să se aducă la forma canonică şi să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

*Demonstraţie.* $A = x^2, B = -xy, C = y^2 \Longrightarrow B^2 - AC = 0$, deci ecuaţia este de tip parabolic

Ecuaţia caracteristică este :

$x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Longrightarrow xy = c$

Facem schimbarea de variabile $\xi = xy, \eta = x$ şi obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

Ecuaţia devine :

$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Longrightarrow \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \cdot f(\xi).$

Integrăm în raport cu $\eta$ şi obţinem $u(\xi, \eta) + g(\xi) = f(\xi) \ln \eta \Longrightarrow$

$\Longrightarrow u(x, y) = f(xy) \ln x + g(xy)$ □

**Exemplul 5.4.** Să se rezolve problema Cauchy

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u(x, 0) = x^3, \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 2x^2.$$

*Demonstraţie.* $A = 3, B = \frac{7}{2}, C = 2 \Longrightarrow B^2 - AC = \frac{25}{5} > 0$, deci ecuaţia este de tip hiperbolic

Ecuaţia caracteristică este :

$3dy^2 - 7dxdy + 2dx^2 = 0 \Longrightarrow 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\frac{dy}{dx} + 2 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2$ şi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$.

Atunci familiile de curbe caracteristice sunt :

$2x - y = c_1$

$x - 3y = c_2$

Cu schimbarea de variabile $\xi = 2x - y, \eta = x - 3y$, ecuaţia se reduce la forma canonică $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, de unde rezultă soluţia generală

$$u(x, y) = \varphi(2x - y) + \psi(x - 3y).$$

Condiţiile problemei Cauchy sunt :

$\varphi(2x) + \psi(x) = x^3$

$-\varphi'(2x) - 3\psi'(x) = 2x^2$

Integrând a doua relaţie obţinem $-\frac{1}{2}\varphi(2x) - 3\psi(x) = \frac{2}{3}x^3 + k$

Atunci $\varphi(2x) = \frac{19}{96}(2x)^3 + c_1$ şi $\psi(x) = -\frac{7}{12}x^3 - c_1$, deci soluţia problemei Cauchy este

$$u(x, y) = \frac{19}{96}(2x - y)^3 - \frac{7}{12}(x - 3y)^3.$$

□

## 5.2 Problema lui Cauchy asupra coardei infinite. Metoda de rezolvare a lui d'Alembert

Problema presupune determinarea funcţiei $u(x, t)$ definită pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $t \geq 0$ ce satisface următoarele condiţii

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \ \text{ şi } \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \ \ \text{pentru } \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $\varphi$ şi $\psi$ sunt două funcţii precizate pe toată axa $Ox$. Funcţia $\varphi(x)$ reprezintă profilul coardei vibrante în momentul iniţial $t = 0$, iar $\psi(x)$ reprezintă viteza punctelor coardei în momentul iniţial $t = 0$.

Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$a^2 dt^2 - dx^2 = 0$$

din care obţinem

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{a}$$

Atunci familiile de curbe caracteristice sunt :

$$x - at = c_1$$

$$x + at = c_2$$

Deoarece este o ecuaţie de tip hiperbolic, facem schimbarea de variabile $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ şi obţinem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Deci forma canonică devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Putem scrie ecuaţie astfel $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$, de unde rezultă că $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$. Integrând în raport cu $\xi$, deducem că

$$u(\xi, \eta) = \int f(\xi)d\xi + \theta_2(\eta) \text{ sau } u(\xi, \eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta).$$

Revenind la variabilele $x$ şi $t$, soluţia generală este

$$u(x, t) = \theta_1(x + at) + \theta_2(x - at).$$

Tinând seama de condiţiile iniţiale avem :

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x)$$

$$a\theta_1'(x) - a\theta_2'(x) = \psi(x)$$

Integrând a doua ecuaţie în raport cu $x$ obţinem :

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x)$$

$$a\theta_1(x) - a\theta_2(x) = \int_0^x \psi(\tau)d\tau + c, \text{ unde } c \text{ este o constantă oarecare.}$$

Adunând aceste identităţi găsim

$$\theta_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\tau)d\tau + \frac{c}{2a},$$

iar dacă scădem a doua identitate din prima rezultă că

$$\theta_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\tau)d\tau - \frac{c}{2a},$$

adică

$$\theta_1(x+at) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\tau)d\tau + \frac{c}{2a}$$

şi

$$\theta_2(x-at) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\tau)d\tau - \frac{c}{2a},$$

deci soluţia problemei Cauchy se poate scrie sub forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau \tag{5.17}$$

numită **formula lui d'Alembert**.

Din formula lui d'Alembert se poate trage concluzia că , dacă există soluţia problemei Cauchy a coardei vibrante aceasta este unică . Intr-adevăr, să presupunem că problema Cauchy ar avea două soluţii $u_1(x,t)$ şi $u_2(x,t)$. Notăm $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Funcţia $u(x,t)$ satisface ecuaţia coardei vibrante, deoarece este o combinaţie liniară de soluţiile $u_1$ şi $u_2$. Observăm că

$$u(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi(x) - \psi(x) = 0$$

Rezultă că funcţia $u(x,t)$ este soluţia unei probleme Cauchy având condiţiile iniţiale identic nule. In acest caz, formula lui d'Alembert ne dă $u(x,t) = 0$, deci $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, adică soluţia problemei Cauchy este unică .

Pentru a demonstra existenţa soluţiei problemei Cauchy a coardei vibrante, vom arăta că funcţia $u(x,t)$ dată de formula (5.17) este tocmai soluţia acestei probleme. Deci vom demonstra că această funcţie satisface ecuaţia coardei vibrante şi condiţiile iniţiale. Intr-adevăr, avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(x+at) - \psi(x-at)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a\varphi'(x+at) - a\varphi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}[a\psi(x+at) + a\psi(x-at)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi'(x+at) - \psi'(x-at)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2\varphi''(x+at) + a^2\varphi''(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}[a^2\psi'(x+at) - a^2\psi'(x-at)]$$

de unde rezultă

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ceea ce arată că funcţia dată de formula (5.17) satisface ecuaţia coardei vibrante.

Făcând în egalitatea (5.17) $t = 0$, avem $u(x, 0) = \varphi(x)$ şi de asemenea, înlocuind $t = 0$ în $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$, obţinem $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$.

Deci problema Cauchy a coardei infinite are întotdeauna o soluţie unică şi aceasta este dată de formula (5.17).

**Exemplul 5.5.** Să se găsească soluţia ecuaţiei coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

cu condiţiile iniţiale $u(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin x$.

*Demonstraţie.* Cf. formulei lui d'Alembert avem

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2} \right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin y dy =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2} \right] - -\frac{1}{2}[\cos(x+t) - \cos(x-t)] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2} \right] - \frac{1}{2} \cdot \left[ -2 \sin \frac{x+t+x-t}{2} \sin \frac{x+t-x+t}{2} \right] =$$

$$\left[ \frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2} \right] + \sin x \sin t$$

□

## 5.3 Problema lui Cauchy asupra coardei finite. Metoda separării variabilelor

In studiul vibraţiilor coardei finite nu este suficient să se cunoască numai profilul şi vitezele punctelor coardei în momentul iniţial $t = 0$, ci trebuie sı se precizeze şi comportarea coardei la capetele ei. Cel mai simplu caz ese acela când ambele capete ale coardei sunt fixate. Pentru rezolvarea acestei probleme vom folosi o metodă generală numită metoda separării variabilelor, atribuită lui Fourier.

Considerăm o coardă de lungime $l$. Presupunem că în poziţie de repaus ea este situată de-a lungul intervalului $0 \leq x \leq l$ de pe axa $Ox$. Formulăm următoarea problemă Cauchy asupra coardei finite:

Să se determine funcţia $u(x, t)$ definită pentru $0 \leq x \leq l$ şi $t \geq 0$ şi care satisface următoarele condiţii :

$$1.\ a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ \text{ pentru } \ 0 < x < l \ \text{ şi } \ t > 0$$

$$2.\ u(x, 0) = \varphi(x) \ \text{ şi } \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \ \text{ pentru } \ 0 \leq x \leq l$$

$$3.\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \ \text{ pentru } \ t \geq 0$$

Condiţiile 3, care precizează comportarea celor două capete ale coardei se numesc **condiţii la limită** .

Metoda separării variabilelor constă în găsirea unui şir infinit de soluţii de formă particulară ale ecuaţiei considerate, iar apoi, cu ajutorul acestor soluţii, se formează o serie ai cărei coeficienţi se determină astfel încât suma seriei să ne dea tocmai soluţia problemei tratate.

Se caută soluţiile coardei vibrante de forma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5.18}$$

şi astfel încât să satisfacă condiţiile la limită

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \ \text{ şi } \ u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

De aici rezultă că trebuie să avem

$$X(0) = 0, \ \ X(l) = 0, \tag{5.19}$$

în caz contrar am avea $T(t) = 0$ ceea ce ar conduce la soluţia banală $u(x,t) = 0$, pe care o excludem din consideraţiile noastre.

Inlocuind funcţia (5.18) în ecuaţia coardei vibrante obţinem

$$XT'' = a^2X''T.$$

impărţim această egalitate cu $a^2XT$ şi obţinem

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X},$$

unde în membrul stâng avem o funcţie care depinde numai de variabila $t$, iar în membrul drept o funcţie care depinde numai de variabila $x$. Egalitatea între aceste funcţii pentru orice $x$ şi $t$ nu este posibilă decât atunci când ele sunt egale cu o constantă . Notând această constantă cu $-\lambda$, obţinem următoarele ecuaţii diferenţiale

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5.20}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \tag{5.21}$$

Pentru a determina soluţiile de forma (5.18) ale ecuaţiei coardei vibrante şi care verifică condiţiile la limită indicate, determinăm mai întâi soluţiile ecuaţiei (5.20), care satisfac condiţiile (5.19), iar apoi integrăm ecuaţia (5.21).

Ecuaţia diferenţială (5.20) este de ordinul doi, liniară cu coeficienţi constanţi. Soluţia ei generală este :

a) Dacă $\lambda < 0$, $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, unde $c_1$ şi $c_2$ sunt constante arbitrare. Condiţiile (5.19) ne conduc la următorul sistem liniar omogen în $c_1$ şi $c_2$ :

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$$

Având în vedere că funcţia exponenţială nu se anulează pentru nicio valoare, putem împărţi a doua ecuaţie cu $e^{-\sqrt{-\lambda}l}$ şi găsim următorul sistem :

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}l} + c_2 = 0$$

Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\sqrt{-\lambda}l} & 1 \end{vmatrix} = 1 - e^{2\sqrt{-\lambda}l} \neq 0$, deoarece $l \neq 0$ şi $\lambda \neq 0$. Cum determinantul sistemului este diferit de 0, atunci sistemul are numai soluţia banală $c_1 = 0, c_2 = 0$. In consecinţă , pentru $\lambda < 0$, ecuaţia (5.20) nu admite nicio soluţie nebanală care să satisfacă condiţiile (5.19).

b) Dacă $\lambda = 0$, $X(x) = c_1 x + c_2$, unde $c_1$ şi $c_2$ sunt constante arbitrare. Condiţiile (5.19) ne dau $X(0) = c_2 = 0, X(l) = c_1 l = 0$, de unde rezultă $c_1 = 0, c_2 = 0$. Astfel ajungem din nou la soluţia banală , care nu serveşte la nimic.

c) Dacă $\lambda > 0$, $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Condiţiile (5.19) ne conduc la următoarele egalităţi :

$$X(0) = c_1 = 0$$
$$X(l) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Ultimul produs se anulează dacă $c_2 = 0$ sau dacă $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Primul caz ne conduce din nou la soluţia banală . Acceptăm deci că $c_2 \neq 0$ şi $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Această egalitate este satisfăcută pentru $\sqrt{\lambda}l = n\pi$ sau $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, unde $n = 1, 2, \ldots$.

Soluţia ecuaţiei (5.20) corespunzătoare lui $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ o scriem astfel :

$$X_n = c_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

unde $c_n$ este o constantă arbitrară .

In concluzie, ecuaţia (5.20) admite un şir infinit de soluţii nebanale care satisfac şi condiţiile (5.19).

Urmează să integrăm ecuaţia (5.21). Corespunzător lui $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ avem ecuaţia diferenţială

$$T'' + a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0 \tag{5.22}$$

a cărei soluţie generală $T_n(t)$ este

$$T_n(t) = \alpha_n \cos\frac{n\pi}{l}at + \beta_n \sin\frac{n\pi}{l}at.$$

Astfel ecuaţia (5.21) (respectiv (5.22)) ne conduce de asemenea la un şir infinit de funcţii.

Notăm

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}at + b_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (5.23)$$

unde $a_n, b_n$ sunt constante oarecare ce provin din constantele $\alpha_n, \beta_n, c_n$. Din felul cum au fost găsite funcţiile $X_n(x)$ şi $T_n(t)$ rezultă că funcţia $u_n(x,t)$ satisface atât ecuaţia coardei vibrante cât şi condiţiile la limită din problema Cauchy.

Am obţinut în acest fel un şir infinit de soluţii de forma particulară (5.18) a coardei vibrante şi care satisface condiţiile la limită din problema Cauchy:

$$u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_n(x,t), \ldots \qquad (5.24)$$

Trecem la a doua etapă a metodei lui Fourier, la determinarea soluţiei problemei Cauchy cu ajutorul funcţiilor $u_n(x,t)$. Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ sau mai explicit, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}at + b_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (5.25)$$

Presupunem că există $u(x,t)$ suma seriei (5.25)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}at + b_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (5.26)$$

Admitem de asemenea că funcţia $u(x,t)$ este soluţia problemei Cauchy, deci sunt satisfăcute condiţiile iniţiale ale problemei

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x), \;\; 0 \le x \le l \qquad (5.27)$$

şi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{n\pi}{l}ab_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x), \;\; 0 \le x \le l. \qquad (5.28)$$

Aceste egalităţi reprezintă dezvoltarea funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ în serie Fourier de sinusuri. Prin urmare, coeficienţii acestor serii se exprimă cu formulele cunoscute din teoria seriilor Fourier (aşa cum vom vedea în Capitolul 7) :

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx \qquad (5.29)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx \qquad (5.30)$$

Invers, să presupunem că $a_n$ şi $b_n$ din seria (5.26) sunt determinaţi cu ajutorul formulelor (5.29) şi (5.30). Vom demonstra că seria (5.26) cu coeficienţii astfel determinaţi ne dă tocmai soluţia problemei Cauchy, dacă funcţiile $\varphi$ şi $\psi$ din condiţiile iniţiale ale problemei îndeplinesc anumite cerinţe pe care urmează să le precizăm în continuare.

Reamintim un rezultat care se demonstrează în teoria seriilor Fourier: Dacă o funcţie periodică $f$, având perioada $2l$, admite toate derivatele până la ordinul $k$ inclusiv şi acestea sunt continue pe axa $Ox$, şi dacă derivata de ordinul $k+1$ este continuă pe porţiuni, atunci seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|\alpha_n| + |\beta_n|)$ este convergentă . Am notat cu $\alpha_n$ şi $\beta_n$ coeficienţii Fourier ai funcţiei $f$.

Pornind de la acest rezultat arătăm că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n| \tag{5.31}$$

este convergentă dacă funcţia $\varphi$ satisface următoarele condiţii:

1. admite derivatele $\varphi'$ şi $\varphi''$ care sunt continue pe intervalul $0 \leq x \leq l$;
2. admite şi derivata $\varphi'''$ care este continuă pe porţiuni pe intervalul $0 \leq x \leq l$;
3. $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ şi $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.

Din $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ rezultă că $\varphi$ se poate prelungi impar pe $[-l, 0]$ şi după acesta pe toată axa $Ox$ ca o funcţie periodică şi continuă .

Arătăm că derivatele $\varphi'$ şi $\varphi''$ prelungite pe toată axa $Ox$ sunt, de asemenea, continue. Derivatele $\varphi'$ şi $\varphi''$ fiind continue pe intervalul $(0, l)$, vor fi continue pe orice interval de forma $(nl, (n+1)l)$, unde $n$ este un număr întreg oarecare. Deci continuitatea funcţiilor $\varphi'$ şi $\varphi''$ trebuie verificată doar în punctele $x = nl, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ale axei $Ox$. Să alegem arbitrar punctul $x = nl$. Funcţia $\varphi$ este impară , deci avem identitatea $\varphi(nl+x) = -\varphi(nl-x)$ pentru orice $x$. Derivând ambii membri ai egaltăţii obţinem $\varphi'(nl + x) = \varphi'(nl-x)$. Dacă $x \longrightarrow 0$, atunci $\varphi'(nl+x) \longrightarrow \varphi'(nl)$ şi $\varphi'(nl-x) \longrightarrow \varphi'(nl)$ ceea ce demonstrează continuitatea lui $\varphi'$ în $x = nl$. Analog obţinem $\varphi''(nl + x) = -\varphi''(nl - x)$. Ţinând seama de $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, avem $\varphi''(nl + x) \longrightarrow 0$ şi $\varphi''(nl - x) \longrightarrow 0$ când $x \longrightarrow 0$. Prin urmare şi funcţia $\varphi''$ este continuă în $x = nl$. Având în vedere că $\varphi''$ este evident continuă pe orice interval de forma $(nl, (n+1)l)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, am demonstrat continuitatea funcţiei $\varphi''$ pe toată axa $Ox$. In sfârşit, funcţia $\varphi'''$ prelungită pe toată axa $Ox$ va rămâne continuă pe porţiuni, deoarece eventuala discontinuitate a funcţiei $\varphi'''$ în punctele $x = nl$ nu are importanţă la continuitatea pe porţiuni.

Astfel, din rezultatul pe care l-am amintit mai sus, rezultă că seria numerică (5.31) este convergentă .

Formulăm acele condiţii asupra lui $\psi$ care ne asigură convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|. \tag{5.32}$$

Dacă

1. $\psi'$ există şi este continuă pe $0 \leq x \leq l$,
2. $\psi''$ există şi este continuă pe porţiuni pe $0 \leq x \leq l$,
3. $\psi(0) = \psi(l) = 0$,

atunci seria (5.32) este convergentă .

Demonstraţia acestei afirmaţii se face analog cu cea anterioară .

Demonstrăm acum că seria (5.26), unde coeficienţii $a_n$ şi $b_n$ sunt calculaţi cu ajutorul formulelor (5.29) şi (5.30) ne dă soluţia problemei Cauchy, dacă funcţiile $\varphi$ şi $\psi$ satisfac condiţiile 1,2,3 de mai sus.

Arătăm mai întâi că seria (5.26) este uniform şi absolut convergentă pentru $0 \leq x \leq l$ şi $t \geq 0$. Intr-adevăr, sunt evidente următoarele inegalităţi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} at + b_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \right| \cdot \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|)$$

Cum seriile (5.31) şi (5.32) sunt convergente, din inegalitatea de mai sus şi din criteriul lui Weierstrass, rezultă ca seria (5.26) este uniform şi absolut convergentă . Notăm cu $u(x,t)$ suma seriei (5.26), deci $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$.

Vom demonstra că funcţia $u(x,t)$ satisface ecuaţia coardei vibrante şi condiţiile iniţiale.

Funcţia $u(x,t)$ satisface ecuaţia coardei vibrante, dacă seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \tag{5.33}$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \tag{5.34}$$

sunt uniform convergente. Intr-adevăr, avem următoarele inegalităţi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{l^2} \left| a_n \cos \frac{n\pi}{l} at + b_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right| \cdot \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|)$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} \left| a_n \cos \frac{n\pi}{l} at + b_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right| \cdot \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2 a^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|a_n|+|b_n|)$$

de unde va rezulta absolut şi uniform convergenţa seriilor (5.33) şi (5.34). Din calculul diferenţial şi integral, din uniform convergenţa seriilor (5.33) şi (5.34) rezultă existenţa derivatelor parţiale $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ şi egalităţile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \text{ şi } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}.$$

Prin urmare $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$, deoarece funcţiile $u_n(x,t)$ satisfac ecuaţia coardei vibrante. Această egalitate arată că $u(x,t)$ este o soluţie a ecuaţiei coardei vibrante.

Verificăm condiţiile iniţiale. Pentru $t=0$, din seria (5.26) găsim $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x$. Insă , deoarece $a_n$ sunt coeficienţii Fourier calculaţi cu formula (5.29), avem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$, deci $u(x,0)=\varphi(x)$.

Pentru verificarea celei de-a doua condiţii iniţiale, calculăm

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-a_n \sin\frac{n\pi}{l}at + b_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

La fel ca mai înainte se poate demonstra că şi această serie este uniform şi absolut convergentă pentru $0\leq x\leq l$ şi $t\geq 0$. Putem deci să înlocuim $t=0$ şi obţinem $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$. Formula (5.30) arată că membrul drept este exact seria Fourier a funcţiei $\psi$, deci $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$.

Cum $u_n(x,t)$ satisfac condiţiile la limită rezultă evident că $u(x,t)$ satisface aceste condiţii.

**Exemplul 5.6.** Să se determine vibraţiile unei coarde de lungime $l$, având capetele fixate, când forma iniţială a coardei e dată de funcţia $\varphi(x) = 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right)$, iar viteza iniţială este 0.

*Demonstraţie.* Avem de rezolvat următoarea problemă :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0<x<l, t>0$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \text{ pentru } 0\leq x\leq l$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \text{ pentru } t\geq 0$$

Conform (5.30), $b_n = 0$.
Conform (5.29) avem

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = \frac{8}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}xdx - \frac{8}{l^2}\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

Dar

$$\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}xdx = -\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{l}x/_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}xdx =$$

$$-\frac{l^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x/_0^l = (-1)^{n+1}\frac{l^2}{n\pi}$$

şi

$$\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}xdx = -\frac{l}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi}{l}x/_0^l + \frac{2l}{n\pi}\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}xdx = (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} +$$

$$\frac{2l}{n\pi}\left[\frac{l}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{l}x/_0^l - \frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}xdx\right] = (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x/_0^l =$$

$$(-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}[(-1)^n + 1]$$

Deci $a_n = (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - \frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1]$.
Atunci $a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{32l}{(2n+1)^3\pi^3}$.
Aşadar, conform (5.26),

$$u(x,t) = \frac{32l}{\pi^3}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

□

**Exemplul 5.7.** Să se rezolve problema Cauchy asupra coardei vibrante finite :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x,0) = \sin 3x - 4\sin 10x, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin 4x + \sin 6x,\ \ 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ t \geq 0.$$

*Demonstraţie.* Vom determina coeficienţii $a_n$ şi $b_n$ prin identificare folosind formula (5.26) şi condiţiile iniţiale ale problemei date.

Din $u(x,0) = \sin 3x - 4\sin 10x \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \sin 3x - 4\sin 10x.$

Egalând coeficienţii obţinem $a_3 = 1, a_{10} = -4, a_n = 0$, pentru $n \neq 3, 10$.

Din $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin 4x + \sin 6x \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx = 2\sin 4x + \sin 6x.$

Egalând coeficienţii obţinem $b_4 = \frac{1}{4}, b_6 = \frac{1}{12}, b_n = 0$, pentru $n \neq 4, 6$.

Deci

$$u(x,t) = \cos 6t \sin 3x - 4\cos 20t \sin 10x + \frac{1}{4}\sin\sin 8t \sin 4x + \frac{1}{12}\sin 12t \sin 6x.$$

□

## 5.4 Rezolvarea problemei Dirichlet pentru discul unitate

Considerăm discul unitate raportat la reperul ortogonal $xOy$. Fie $D = \left\{x^2 + y^2 < 1\right\}$ şi $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ frontiera orientată pozitiv a lui $D$. Problema Dirichlet constă în determinarea unei funcţii continue $u\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ care să fie armonică în $D$ (i.e. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$) şi astfel încât $u|_\Gamma$ să ia valori prescrise.

Arătăm că această problemă admite o soluţie unică . Intr-adevăr, fie $u_1, u_2$ două soluţii şi $v = u_1 - u_2$. Atunci $\Delta v = 0$ în $D$ şi $v|_\Gamma = 0$. Aplicând formula Green-Riemann, rezultă

$$\int_\Gamma (-v\frac{\partial v}{\partial y}dx + v\frac{\partial v}{\partial x}dy) = \int\int_{\overline{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] dxdy =$$

$$\int\int_D \left[v\Delta v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$$

Tinând cont că $v|_\Gamma = 0$ şi $\Delta v = 0$ în $D$, rezultă

$$\int\int_D \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = 0,$$

deci $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0$. Atunci $\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, deci $v$ este constantă în $D$, $v = k$. Fiind continuă în $\overline{D}$, $v$ va fi egală cu $k$ şi în punctele lui $\Gamma$, deci $k = 0$, deci $v = 0$ şi ca atare $u_1 = u_2$ în $D$.

Se trece la coordonate polare şi problema se reformulează astfel : trebuie determinată o funcţie $u(\rho, \theta)$, $(\rho, \theta) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ astfel încât

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{5.35}$$

pentru $\rho \in [0,1], \theta \in \mathbb{R}$ şi în plus $u(\rho,0)|_{\rho=1} = f(\theta)$ cu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cunoscută presupusă continuă , nenulă , periodică de perioadă $2\pi$. (Dacă $f \equiv 0$, atunci $u \equiv 0$).

Aplicăm metoda separării variabilelor şi căutăm soluţii de forma

$$u(\rho,\theta) = X(\rho)Y(\theta) \tag{5.36}$$

cu $X, Y$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ (şi $Y$ neapărat periodică de perioadă $2\pi$). Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = X'(\rho)Y(\theta),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = X''(\rho)Y(\theta),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = X(\rho)Y''(\theta)$$

şi înlocuind în ecuaţia dată , rezultă

$$\rho^2 X''(\rho)Y(\theta) + \rho X'(\rho)Y(\theta) + X(\rho)Y''(\theta) = 0$$

sau separând variabilele avem

$$\frac{\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} = -\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)} \tag{5.37}$$

Atunci ambii membri vor fi egali cu aceeaşi constantă reală $k$, deci

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) - kX(\rho) = 0$$

şi

$$Y''(\theta) + kY(\theta) = 0 \ \text{ pentru } \ \rho \in [0,1), \theta \in \mathbb{R}.$$

Pentru $k < 0$, soluţia generală a ecuaţiei în $Y$ este

$$Y(\theta) = c_1 \mathrm{e}^{\theta\sqrt{-k}} + c_2 \mathrm{e}^{-\theta\sqrt{-k}}$$

cu $c_1, c_2$ constante şi aceasta este periodică doar dacă $c_1 = c_2 = 0$, adică $Y = 0$ şi $f$ ar rezulta nulă , din nou caz exclus.

Rămâne ca unică posibilitate $k \geq 0$, $k = \omega^2 (\omega \geq 0)$ şi ecuaţia

$$Y''(\theta) + \omega^2 Y(\theta) = 0$$

are o soluţie $Y(\theta) = A\cos\omega\theta + B\sin\omega\theta$ cu $A, B$ constante. Funcţia $Y(\theta)$ fiind periodică de perioadă $2\pi$ rezultă în mod necesar că $\omega = n$ întreg ($n \geq 0$).

Atunci $Y(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta$.

Pe de altă parte, rezultă $k = n^2$ şi

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) - n^2 X(\rho) = 0.$$

Aceasta este o ecuaţie Euler şi soluţia ei generală este de forma

$$X(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

cu $C, D$ constante. Dacă $D \neq 0$, atunci facând $\rho \longrightarrow 0$ ar rezulta că $X(\rho) \longrightarrow \pm\infty$ şi ar rezulta că funcţia armonică $u(\rho,\theta)$ ar tinde către infinit spre centrul discului, ceea ce este exclus. Aşadar, $D = 0$ şi $X(\rho) = C\rho^n$.

Astfel, pentru orice întreg $n \geq 0$ am pus în evidenţă câte o soluţie (5.36) a ecuaţiei (5.35), anume

$$u_n(\rho, \theta) = \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Aplicăm "principiul suprapunerii efectelor" care afirmă că suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \theta)$ este de asemenea soluţie (în ipoteza convergenţei).

Aşadar, funcţia

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{5.38}$$

este soluţie şi rămâne să determinăm constantele $A_n$, $B_n$, din condiţia la frontieră $u(\rho, \theta)|_{\rho=1} = f(\theta)$, adică

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Aceasta este de fapt dezvoltarea Fourier a lui $f$, rezultă

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau, \tag{5.39}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau, \quad n \geq 1 \tag{5.40}$$

Inlocuind în (5.38), rezultă

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \tau) \right] d\tau$$

Dar

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \tau) = \mathrm{Re} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\tau)} \right] = \mathrm{Re} \left[ 1 + 2 \frac{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1 - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}} \right] =$$

$$\mathrm{Re} \frac{1 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1 - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2}$$

şi soluţia explicită a problemei Dirichlet pentru discul unitate este

$$u(\rho, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\tau)}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} d\tau \text{ (**formula clasică a lui Poisson**)}$$

In cazul discului $\{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ de rază $R > 0$, după un raţionament analog, formula devine

$$u(\rho, \theta) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\tau)}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} d\tau$$

**Exemplul 5.8.** Să se găsească soluţia problemei Dirichlet în cazul discului unitate când condiţia la limită este $u(1, \theta) = \sin\theta + \cos 2\theta + 6 \sin 3\theta$.

*Demonstraţie.* Soluţia problemei este de forma (5.38) şi scriind condiţia la limită obţinem

$$u(1,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta=\sin\theta+\cos 2\theta+6\sin 3\theta,$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor rezultă $A_2=1$ şi $A_i=0,\ \forall\ i\neq 1$ şi $B_1=1,B_3=6,B_i=0,\ \forall\ i\neq 1,3$.

Deci $u(\rho,\theta)=\rho\sin\theta+\rho^2\cos 2\theta+6\rho^3\sin 3\theta$. □

## 5.5 Rezolvarea problemei lui Neumann pentru disc

Problema lui Neumann pentru disc o putem formula astfel:

Să se găsească funcţia $u(\rho,\theta)$ continuă împreună cu derivatele sale paţiale de ordinul întâi în domeniul închis $\overline{D}_R=D_R+\Gamma$, unde $D_R=\left\{x^2+y^2<R\right\}$ şi $\Gamma=\overline{D}_R\setminus D_R$, care satisface următoarele condiţii :

1. $\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$ în punctele din $D_R$
2. $\frac{\partial u}{\partial\rho}(R,\theta)=f(\theta)$ pe $\Gamma$

unde $f(\theta)$ este o funcţie dată , continuă împreună cu derivata sa de ordinul întâi şi având derivata a doua continuă pe porţiuni. Presupunem de asemnea că $\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=0$.

Soluţia acestei probleme o putem găsi aplicând metoda separării variabilelor care ne conduce la seria

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\tag{5.41}$$

Coeficienţii $A_n$ şi $B_n$ îi determinăm din condiţia la limită . In acest scop să derivăm pe $u$ în raport cu $\rho$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{\rho^{n-1}}{R^n}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta).$$

Condiţia la limită este exprimată astfel :

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=f(\theta).$$

Am ajuns din nou la o serie Fourier, deci

$$A_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta\ \text{ şi }\ B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta\tag{5.42}$$

Coeficientul $A_0$ rămâne o constantă arbitrară , deoarece soluţia problemei lui Neumann nu este unică , ea depinde de o constantă aditivă .

Se poate demonstra că seria (5.41) în care coeficienţii sunt calculaţi cu ajutorul formulelor (5.42) esre absolut şi uniform convergentă , iar suma ei ne dă soluţia problemei lui Neumann, dacă funcţia $f$ satisface condiţiile specificate în formularea acestei probleme.

**Exemplul 5.9.** Să se determine soluţia problemei lui Neumann definită pe discul $D_R$ cu condiţia la limită $\frac{\partial u}{\partial \rho}(R,\theta) = \cos\theta + \sin 5\theta$.

*Demonstraţie.* Soluţia problemei este de forma

$$u(\rho,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Coeficienţii acestei serii îi vom determina direct folosind condiţia la limită :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \cos\theta + \sin 5\theta,$$

de unde rezultă că $A_1 = 1, A_n = 0, \forall n \geq 2$ şi $B_5 = \frac{1}{5}, B_n = 0, \forall n \neq 5$. Deci soluţia cătată este $u(\rho,\theta) = \frac{A_0}{2} + \frac{\rho}{R}\cos\theta + \frac{1}{5}\left(\frac{\rho}{R}\right)^5 \sin 5\theta$. □

## 5.6 Ecuaţia căldurii

Vom trata problema asupra ecuaţiei căldurii :

Să se găsească funcţia continuă $u(x,t)$ pentru $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ şi care satisface următoarele condiţii :

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pentru $0 < x < l, t > 0$
2. $u(x,0) = \varphi(x)$ pentru $0 \leq x \leq l$
3. $u(0,t) = \psi_1(t),\ \ u(l,t) = \psi_2(t)$ pentru $t \geq 0$

unde $\varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t)$ sunt funcţii date.

Această problemă se numeşte **problema lui Cauchy pentru ecuaţia căldurii**. Aceasta se întâlneşte des la studierea fenomenelor de fizică şi tehnică legate de propagarea căldurii şi la fenomene chimice cu caracter de difuzie. Condiţia 2 se numeşte **condiţia iniţială** , iar condiţiile 3 se numesc **condiţii la limită** .

**Cazul 1**. Vom rezolva mai întâi problema lui Cauchy pentru cazul particular când condiţiile la limită sunt

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0.$$

In acest caz spunem că avem **condiţii la limită omogene**. La rezolvarea acestei probleme vom aplica metoda eparării variabilelor.

La început căutăm un şir infinit de soluţii ale ecuaţiei căldurii, care să satisfacă şi condiţia la limită omogenă . In acest scop vom determina soluţiile de forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

ale ecuaţiei căldurii. După înlocuirea acestei funcţii în ecuaţia căldurii obţinem

$$XT' = a^2X''T$$

sau, împărţind cu $a^2XT$, ajungem la

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Observăm că în prima parte a acestei egalităţi a apărut o funcţie care depinde numai de variabila $t$, iar în partea a doua o funcţie care depinde numai de variabila $x$. Repetând raţionamentul aplicat la ecuaţia coardei vibrante, ajungem la concluzia că egalitatea între aceste două funcţii este posibilă numai dacă ele sunt identice cu o constantă . Obţinem astfel următoarele ecuaţii diferenţiale :

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5.43}$$

şi

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \tag{5.44}$$

Deoarece căutăm acele soluţii ale ecuaţiei căldurii care satisfac condiţiile la limită omogene, avem

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ \ u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

de unde rezultă

$$X(0) = 0 \ \text{ şi } \ X(l) = 0 \tag{5.45}$$

Deci căutăm acele soluţii ale ecuaţiei (5.43) care satisfac şi condiţiile la limită (5.45). Această problemă am întâlnit-o la rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţia coardei vibrante unde am văzut că are soluţii numai dacă $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, iar soluţiile corespunzătoare acestor valori sunt $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$.

Trecem la rezolvarea ecuaţiei (5.44) pentru $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Deci vom integra ecuaţia (5.44) care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile. O scriem sub forma

$$\frac{T'}{T} = -a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

şi rezultă că soluţia ei generală ete dată de

$$T(t) = c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}$$

unde $c_n$ este o constantă arbitrară .

Aşadar, soluţiile particulare ale ecuaţiei căldurii, care satisfac şi condiţiile la limită omogene sunt

$$u_n(x,t) = c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Soluţia problemei Cauchy o obţinem cu ajutorul seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{5.46}$$

formată din soluţiile particulare ale ecuaţiei căldurii obţinute mai sus.

Pentru a găsi formulele care să ne permită calcularea coeficienţilor $c_n$ să presupunem că soluţia problemei Cauchy este dată de seria (5.46), adică

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{5.47}$$

Făcând $t = 0$ şi ţinând seama de condiţia iniţială trebuie să avem

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x).$$

Observăm că această formulă reprezintă dezvoltarea funcţiei $\varphi(x)$ în serie Fourier, deci $c_n$ sunt coeficienţii Fourier şi se calculează cu ajutorul formulei cunoscute din teoria seriilor Fourier:

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \tag{5.48}$$

In următoarea teoremă vom arăta şi invers, calculând coeficienţii $c_n$ cu formula (5.48), seria (5.46) va fi convergentă şi că suma ei dă tocmai soluţia problemei Cauchy.

**Teorema 5.1.** *Dacă funcţia $\varphi(x)$ definită pe intervalul $0 \leq x \leq l$ este continuă şi are derivata continuă pe segmente şi dacă satisface condiţiile la limită*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \tag{5.49}$$

*atunci seria (5.46), în care coeficienţii sunt calculaţi cu formula (5.48), este absolut convergentă şi uniform convergentă , iar suma ei pe care o notăm cu $u(x,t)$ este soluţia problemei Cauchy.*

*Demonstraţie.* Vom arăta mai întâi că seria (5.46) este absolut convergentă şi uniform convergentă pentru $0 \leq x \leq l, t \geq 0$.

Datorită condiţiilor la limită (5.49), funcţia $\varphi(x)$ se poate prelungi pe toată axa $Ox$ astfel încât să obţinem o funcţie periodică şi impară cu perioada $2l$. Funcţia astfel prelungită rămâne continuă şi cu derivata continuă pe porţiuni. Atunci, rezultă că seria numerică

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n| \tag{5.50}$$

este convergentă . Pe de altă parte,

$$|c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x| \le |c_n| \text{ dacă } \ t \ge 0.$$

Conform criteriului lui Weierstrass rezultă că seria (5.46) este absolut convergentă şi uniform convergentă pentru $0 \le x \le l, t \ge 0$. Notăm cu $u(x,t)$ suma acestei serii.

In particular obţinem

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

ceea ce înseamnă că funcţia $u(x,t)$ satisface condiţia iniţială a problemei Cauchy.

Rămâne să arătăm că funcţia $u(x,t)$ satisface ecuaţia căldurii în punctele de coordonate $t > 0$ şi $0 < x < l$. In acest scop este suficient să demonstrăm că seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}, \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \tag{5.51}$$

converg absolut şi uniform pentru $t \ge t_0 > 0$ şi $0 \le x \le l$, unde $t_0 > 0$ este un număr fixat oricât de mic. Intr-adevăr, din convergenţa uniformă a acestor serii, după cum se ştie din calculul diferenţial şi integral, rezultă existenţa derivatelor parţiale $\frac{\partial u}{\partial t}$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi valabilitatea următoarelor egalităţi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t} \ \text{ şi } \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}.$$

Deci putem scrie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right) = 0$$

ceea ce arată că funcţia $u(x,t)$ satisface ecuaţia căldurii în punctele de coordonate $t \ge t_0$ şi $0 \le x \le l$. Numărul $t_0 > 0$ fiind ales arbitrar, rezultă că $u(x,t)$ satisface ecuaţia căldurii pentru orice punct $(x,t)$ astfel încât $t > 0$ şi $0 \le x \le l$.

Demonstrăm acum convergeţa uniformă a seriilor (5.51) pentru $t \geq t_0 > 0$ şi $0 \leq x \leq l$. Din convergenţa seriei (5.50) rezultă că $c_n$ sunt mărginiţi, adică există o constantă $k > 0$ astfel încât

$$|c_n| \leq k, \ \ \forall n.$$

Din $\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$ deducem că $\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \leq n^2 k_1 \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t_0}$ pentru $t \geq t_0 > 0$, deoarece funcţia $\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}$ este descrescătoare. Am notat $k_1 = \frac{\pi^2}{l^2} a^2 k$. Aplicând criteriul de convergenţă al lui d'Alembert, se poate arăta că seria numerică $k_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t_0}$ este convergentă . Intr-adevăr, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{(n+1)\pi}{l}\right)^2 a^2 t_0}}{n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t_0}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathrm{e}^{-(2n+1)\frac{\pi^2}{l^2} a^2 t_0} = 0$$

Din criteriul lui Weierstrass rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$ converge absolut şi uniform pentru $t \geq t_0 > 0$ şi $0 \leq x \leq l$.

Demonstrăm acum uniform convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$.

Din $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 c_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$ găsim $\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \leq k_2 n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t_0}$, pentru $t \geq t_0 > 0$, unde $k_2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 k$.

Aplicând din nou criteriul de convergenţă al lui d'Alembert seriei $\sum_{n=1}^{\infty} k_2 n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t_0}$ converge. Deci, conform criteriul lui Weierstrass rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ este absolut şi uniform convergentă pentru $t \geq t_0 > 0$ şi $0 \leq x \leq l$. □

**Observaţia 5.1.** Vom demonstra unicitatea soluţiei problemei Cauchy considerate. Fie $u$ şi $v$ două soluţii ale aceleiaşi probleme Cauchy. Atunci, în particular, avem

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \text{ şi } \ v(x,0) = \varphi(x)$$

Notăm $w = u - v$ şi fie $w = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$. Evident $w(x,0) = 0$. Deci rezultă că $\alpha_n = 0$, $\forall n$. Deci am demonstrat că $w = 0$, de unde rezultă $u = v$, deci unicitatea soluţiei.

**Cazul 2**. Vom rezolva problema Cauchy formulată la începutul secţiunii. Vom transforma mai întâi problema Cauchy într-o altă problemă Cauchy în

care condiţia iniţială şi condiţiile la limită sunt omogene. Va trebui deci să omogenizăm condiţia iniţială şi condiţiile la limită prin considerarea unei funcţii ajutătoare

$$U(x,t) = \psi_1(t) + \frac{x}{l}[\psi_2(t) - \psi_1(t)] \tag{5.52}$$

Evident această funcţie satisface condiţiile la limită ale problemei Cauchy, adică $U(0,t) = \psi_1(t)$ şi $U(l,t) = \psi_2(t)$.

In locul funcţiei necunoscute $u$ introducem altă funcţie necunoscută $v$ astfel

$$v = u - U. \tag{5.53}$$

Precizăm acum condiţiile pe care trebuie să le verifice funcţia $v$. Avem

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -[\psi_1'(t) + \frac{x}{l}(\psi_2'(t) - \psi_1'(t))] \tag{5.54}$$

Funcţia $v$ trebuie să satisfacă în mod evident condiţia iniţială

$$v(x,0) = \varphi(x) - [\psi_1(0) + \frac{x}{l}(\psi_2(0) - \psi_1(0))] \tag{5.55}$$

şi condiţiile la limită omogene

$$v(0,t) = 0 \text{ şi } v(l,t) = 0 \tag{5.56}$$

Notând

$$f(x,t) = -[\psi_1'(t) + \frac{x}{l}(\psi_2'(t) - \psi_1'(t))]$$

şi

$$\Phi(x) = \varphi(x) - [\psi_1(0) + \frac{x}{l}(\psi_2(0) - \psi_1(0))]$$

obţinem că funcţia $v(x,t)$ trebuie să continuă pentru $0 \le x \le l, t \ge 0$ şi care satisface următoarele condiţii :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) \text{ pentru } 0 < x < l \text{ şi } t > 0 \tag{5.57}$$

$$v(x,0) = \Phi(x) \text{ pentru } 0 \le x \le l \tag{5.58}$$

$$v(0,t) = 0 \text{ şi } v(l,t) = 0 \text{ pentru } t \ge 0 \tag{5.59}$$

unde $f(x,t)$ şi $\Phi(x)$ sunt funcţii date. Această problemă se numeşte **problema Cauchy asupra ecuaţiei căldurii neomogene cu condiţii la limită omogene**.

Această problemă se mai poate simplifica astfel încât şi condiţia iniţială să devină omogenă . Intr-adevăr, dacă $z(x,t)$ este soluţia următoarei probleme Cauchy pe care am rezolvat-o la cazul 1:

1. $\frac{\partial z}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ pentru $0 < x < l$ şi $t > 0$

2. $z(x,0) = \Phi(x)$ pentru $0 \leq x \leq l$

3. $z(0,t) = 0$ şi $z(l,t) = 0$ pentru $t \geq 0$ şi dacă notăm $w = v - z$, atunci găsirea funcţiei $w$ revine la rezolvarea următoarei probleme Cauchy : Să se determine funcţia $w(x,t)$ continuă pentru $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ şi care satisface următoarele condiţii :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t) \text{ pentru } 0 < x < l \text{ şi } t > 0 \tag{5.60}$$

$$w(x,0) = 0 \text{ pentru } 0 \leq x \leq l \tag{5.61}$$

$$w(0,t) = 0 \text{ şi } w(l,t) = 0 \text{ pentru } t \geq 0 \tag{5.62}$$

Am ajuns aşadar la o problemă Cauchy în care atât condiţia iniţială cât şi condiţiile la limită sunt omogene.

Căutăm soluţia aceste probleme ca suma următoarei serii

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{5.63}$$

unde $c_n(t)$ sunt funcţii de varibilă $t$. Pentru a determina aceste funcţii presupunem că seria (5.63) este convergentă şi că suma ei este soluţia $w(x,t)$ a problemei Cauchy, adică

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{5.64}$$

Să admitem de asemenea că funcţia $f(x,t)$ se poate dezvolta în serie Fourier astfel

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{5.65}$$

unde

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Inlocuind în ecuaţia (5.60) funcţiile $w$ şi $f$ obţinem identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n'(t) + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 c_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x = 0. \tag{5.66}$$

Din teoria seriilor Fourier şi identitatea (5.66) rezultă

$$c_n'(t) + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 c_n(t) = f_n(t) \tag{5.67}$$

La această ecuaţie diferenţială putem ataşa o condiţie Cauchy dacă luăm în considerare şi condiţia iniţială pe care o satisface funcţia $w$, adică

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0.$$

De aici rezultă că

$$c_n(0) = 0. \tag{5.68}$$

Ecuaţia diferenţială (5.67) este o ecuaţie liniară de ordinul întâi. Astfel, soluţia ei ce satisface condiţia (5.68) este

$$c_n(t) = \int_0^l \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau \tag{5.69}$$

Invers, dacă $c_n(t)$, coeficienţii seriei (5.63) sunt calculaţi cu formula (5.69) şi dacă funcţia $f(x,t)$ se poate reprezenta cu ajutorul seriei (5.65), atunci seria (5.63) este uniform convergentă şi suma ei, pe care o notăm cu $w(x,t)$, este soluţia problemei Cauchy dată de condiţiile (5.60), (5.61), (5.62).

Rezumând cele de mai sus, putem spune că soluţia $u(x,t)$ a problemei Cauchy formulată la începutul secţiunii este

$$u = U + w + z \tag{5.70}$$

unde $U$ este funcţia (5.52), $w$ satisface ecuaţia (5.60), condiţia iniţială omogenă şi condiţiile la limită omogene (5.61) şi (5.62), iar $z$ satisface ecuaţia omogenă a căldurii, condiţia iniţială neomogenă dată de funcţia $\Phi(x)$ şi condiţiile la limită omogene.

**Exemplul 5.10.** Să se rezolve următoarea problemă Cauchy asupra ecuaţiei căldurii :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; 0 < x < 1, \;\; t > 0$$
$$u(x,0) = x^2 - x, \;\; 0 \le x \le 1$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; t \ge 0$$

*Demonstraţie.* Soluţia problemei are forma (5.47) :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x),$$

unde $c_n$ se calculează cu ajutorul formulei (5.48) :

$$c_n = 2\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x)dx = 2(x^2 - x)\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}|_0^1 +$$

$$+2\int_0^1 (2x-1)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx = \frac{2}{n\pi}\left[(2x-1)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}|_0^1 - \int_0^1 2\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = -\frac{4}{(n\pi)^2}\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^3}[\cos(n\pi) - \cos 0] = \frac{4}{(n\pi)^3}[(-1)^n - 1].$$

Aşadar soluţia problemei Cauchy este

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1]\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\sin(n\pi x).$$

□

**Exemplul 5.11.** Să se rezolve următoarea problemă Cauchy asupra ecuaţiei căldurii :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\sin x,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0$$

$$u(x,0)=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x,\ \ 0\le x\le\pi$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ t\ge 0$$

*Demonstraţie.* Notăm $v(x,t)=u(x,t)-z(x,t)$, unde $z(x,t)$ este soluţia problemei :

$$\frac{\partial z}{\partial t}=9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0$$

$$z(x,0)=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x,\ \ 0\le x\le\pi$$

$$z(0,t)=z(\pi,t)=0,\ \ t\ge 0$$

adică $z(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-9n^2t}\sin(nx)$.

Cum $z(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(nx)=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x$, prin identificarea coeficienţilor obţinem $c_1=1,c_2=2,c_3=3,c_n=0,\forall n\ge 4$.

Deci $z(x,t)=\mathrm{e}^{-9t}\sin x+2\mathrm{e}^{-39t}\sin 2x+3\mathrm{e}^{-81t}\sin 3x$.

Cu notaţia făcută la început obţinem o nouă problemă Cauchy :

$$\frac{\partial v}{\partial t}-9\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial t}-9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=t\sin x,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0$$

$$v(x,0)=u(x,0)-z(x,0)=0,\ \ 0\le x\le\pi$$

$$v(0,t)=u(0,t)-z(0,t)=0,\ \ v(\pi,t)=u(\pi,t)-z(\pi,t)=0,\ \ t\ge 0$$

Aceasta este o problemă Cauchy cu condiţia iniţială şi condiţiile la limită omogene. Soluţia acestei probleme va fi de forma (5.64), $v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\sin(nx)$ calculând $c_n(t)$ cu ajutorul formulelor (5.69) şi (5.65). Coeficienţii Fourier $f_n(t)$ ai funcţiei $f(x,t)=t\sin x$ se obţin prin identificare :

$$t\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin(nx),$$

deci $f_1(t) = t$, $f_n(t) = 0, \forall n \geq 2$. Atunci

$$c_1(t) = \int_0^t \tau \mathrm{e}^{-9(t-\tau)} d\tau = \mathrm{e}^{-9t} \left( \tau \frac{\mathrm{e}^{9\tau}}{9} |_0^t - \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{9\tau}}{9} d\tau \right) =$$

$$= \frac{t}{9} - \frac{\mathrm{e}^{-9t}}{9} \cdot \frac{\mathrm{e}^{9\tau}}{9} |_0^t = \frac{t}{9} - \frac{1}{81}[1 - \mathrm{e}^{-9t}]$$

Deci $v(x,t) = \left[\frac{t}{9} - \frac{1}{81}(1 - \mathrm{e}^{-9t})\right] \sin x$.

Aşadar, $u(x,t) = v(x,t) + z(x,t) = \left[\frac{t}{9} - \frac{1}{81}(1 - \mathrm{e}^{-9t})\right] \sin x +$
$+\mathrm{e}^{-9t} \sin x + 2\mathrm{e}^{-39t} \sin 2x + 3\mathrm{e}^{-81t} \sin 3x$ □

**Exemplul 5.12.** Să se rezolve următoarea problemă Cauchy asupra ecuaţiei căldurii :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ 0 < x < 1, \ \ t > 0$$
$$u(x,0) = 6 \sin(3\pi x), \ \ 0 \leq x \leq 1$$
$$u(0,t) = t, \ \ u(1,t) = t^2, \ \ t \geq 0$$

*Demonstraţie.* Vom omogeniza condiţia iniţială şi condiţiile la limită . Vom considera funcţia $U(x,t)$ din formula (5.52) :

$$U(x,t) = t + x(t^2 - t).$$

Deci $U(0,t) = t, \ \ U(1,t) = t^2$.

Introducem funcţia necunoscută $v(x,t) = u(x,t) - U(x,t)$ şi obţinem următoarea problemă Cauchy :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = -t + x(2t-1), \ \ 0 < x < 1, \ \ t > 0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - U(x,0) = 6 \sin(3\pi x), \ \ 0 \leq x \leq 1$$

$$v(0,t) = u(0,t) - U(0,t) = t - t = 0, \ \ v(1,t) = u(1,t) - U(1,t) = t^2 - t^2 = 0, \ \ t \geq 0$$

Rezolvăm problema ca în exemplul 5.11. Notăm $w(x,t) = v(x,t) - z(x,t)$, unde $z(x,t)$ este soluţia problemei Cauchy :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \ 0 < x < 1, \ \ t > 0$$
$$z(x,0) = 6 \sin(3\pi x), \ \ 0 \leq x \leq 1$$
$$z(0,t) = 0, \ \ z(1,t) = 0, \ \ t \geq 0$$

având forma $z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$. Cum $z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) =$ $6 \sin(3\pi x)$, rezultă $c_3 = 3, c_n = 0, \forall n \neq 3$. Deci $z(x,t) = 3\mathrm{e}^{-(3\pi)^2 t} \sin(3\pi x)$. Funcţia $w(x,t)$ verifică problema Cauchy :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - t + x(2t-1), \ \ 0 < x < 1, \ \ t > 0$$

$$w(x,0)=0,\ \ 0\le x\le 1$$

$$w(0,t)=0,\ \ w(1,t)=0,\ \ t\ge 0$$

şi se caută de forma $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\sin(n\pi x)$.

Presupunem că $f(x,t)=-t+x(2t-1)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin(n\pi x)$, unde

$$f_n(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin(n\pi x)dx=2\int_0^1[-t+x(2t-1)]\sin(n\pi x)dx=$$

$$=2[-t+x(2t-1)]\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}|_0^1+2\int_0^1(2t-1)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx=$$

$$=2(t-1)\cdot\frac{-\cos(n\pi)}{n\pi}-2(-t)\cdot\frac{-\cos 0}{n\pi}+2\cdot\frac{2t-1}{n\pi}\cdot\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}|_0^1=$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}(t-1)-2t\cdot\frac{1}{n\pi}.$$

Conform formulei (5.69) avem :

$$c_n(t)=\int_0^t\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}(\tau-1)-2\tau\cdot\frac{1}{n\pi}\right]\mathrm{e}^{-(n\pi)^2(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\int_0^t(\tau-1)\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}d\tau-\frac{2}{n\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\int_0^t\tau\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}d\tau=$$

$$=\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[(\tau-1)\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}}{(n\pi)^2}|_0^t-\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}}{(n\pi)^2}d\tau\right]-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\left[\tau\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}}{(n\pi)^2}|_0^t-\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}}{(n\pi)^2}d\tau\right]=$$

$$=\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[(t-1)\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2t}}{(n\pi)^2}+\frac{1}{(n\pi)^2}-\frac{1}{(n\pi)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}}{(n\pi)^2}|_0^t\right]$$

$$-\frac{2}{n\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\left[t\cdot\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2t}}{(n\pi)^2}-\frac{1}{(n\pi)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2\tau}}{(n\pi)^2}|_0^t\right]=$$

$$=\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\left[(t-1)\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2t}}{(n\pi)^2}+\frac{1}{(n\pi)^2}-\frac{1}{(n\pi)^4}\cdot\mathrm{e}^{(n\pi)^2t}+\frac{1}{(n\pi)^4}\right]-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi)^2t}\left[t\cdot\frac{\mathrm{e}^{(n\pi)^2t}}{(n\pi)^2}-\frac{1}{(n\pi)^4}\cdot\mathrm{e}^{(n\pi)^2t}+\frac{1}{(n\pi)^4}\right]=$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^3}\mathrm{e}^{-(n\pi)^2 t}[(-1)^{n+1}(t-1)\mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} + (-1)^{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} +$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} - t\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} - \frac{1}{(n\pi)^2}]$$

Deci $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^3}\mathrm{e}^{-(n\pi)^2 t}[(-1)^{n+1}(t-1)\mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} + (-1)^{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}\cdot$
$\mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} - t\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} - \frac{1}{(n\pi)^2}]\sin(n\pi x)$.

Aşadar,

$$u(x,t) = w(x,t) + z(x,t) + U(x,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^3}\mathrm{e}^{-(n\pi)^2 t}[(-1)^{n+1}(t-1)\mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} + (-1)^{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} +$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} - t\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cdot \mathrm{e}^{(n\pi)^2 t} - \frac{1}{(n\pi)^2}]\sin(n\pi x) +$$

$$+3\mathrm{e}^{-(3\pi)^2 t}\sin(3\pi x) + t + x(t^2 - t).$$

□

# Capitolul 6

# Funcţii complexe

## 6.1 Funcţii olomorfe. Condiţiile Cauchy-Riemann. Funcţii elementare

**Definiţia 6.1.** Fie $A \subset \mathbb{C}$. Se numeşte **funcţie complexă** orice funcţie $f\colon A \to \mathbb{C}$ (deci o funcţie cu valori complexe de variabilă complexă ).

Dacă notăm $w = f(z)$ cu $z \in A$ şi $z = x+\mathrm{i}y$, $w = u+\mathrm{i}v$, unde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, iar $f = P+\mathrm{i}Q$ (adică $P = \mathrm{Re}f, Q = \mathrm{Im}f$), se pun în evidenţă două funcţii reale $P, Q\colon A \to \mathbb{R}$, unde am considerat $A \subset \mathbb{R}^2$ ca o mulţime de perechi de numere reale. Atunci egalitatea $w = f(z)$ este echivalentă cu două egalităţi reale $u = P(x, y)$ şi $v = Q(x, y)$ şi funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ este echivalentă cu o transformare punctuală $A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longrightarrow (P(x, y), Q(x, y))$.

**Definiţia 6.2.** Dacă $A \subset \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă , funcţia complexă $f$ este **continuă** într-un punct $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in A$ dacă şi numai dacă $P$ şi $Q$ sunt simultan continue în punctul $(x_0, y_0)$.

**Definiţia 6.3.** Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă . Funcţia $f$ se numeşte **olomorfă într-un punct** $z_0 \in A$ (sau $\mathbb{C}$**- derivabilă în** $z_0$ sau **monogenă în** $z_0$) dacă există şi este finită (adică aparţine lui $\mathbb{C}$) limita $l = \lim\limits_{z \to z_0, z \neq z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Notăm $l$ cu $f'(z_0)$ şi se numeşte **derivata complexă a lui** $f$ **în** $z_0$.

**Observaţia 6.1.** Dacă funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ este olomorfă în $z_0 \in A$, atunci ea este continuă în $z_0$.

**Definiţia 6.4.** Funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ se numeşte olomorfă pe deschisul $A$ dacă ea este olomorfă în orice punct $z_0 \in A$.

**Observaţia 6.2.** Suma, produsul, câtul şi compunerea a două funcţii olomorfe pe un deschis $A$ sunt funcţii olomorfe.

Fie $w = f(z)$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ definită pe un deschis $A \subset \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

Dacă $f$ este olomorfă în $z_0$, atunci $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$. In

particular, pentru $h$ real va rezulta că

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+\mathrm{i}h)-f(z_0)}{\mathrm{i}h}=f'(z_0)$$

şi ţinând cont că $f=P+\mathrm{i}Q$ se obţine

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0+h,y_0)-P(x_0,y_0)}{h}+\mathrm{i}\lim_{h\to 0}\frac{Q(x_0+h,y_0)-Q(x_0,y_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0,y_0+h)-P(x_0,y_0)}{\mathrm{i}h}+\mathrm{i}\lim_{h\to 0}\frac{Q(x_0,y_0+h)-Q(x_0,y_0)}{\mathrm{i}h}$$

Dacă funcţiile $P$ şi $Q$ au derivate parţiale în raport cu $x$ şi $y$ în punctul $(x_0,y_0)$, atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$$

de unde deducem

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}$$

numite **condiţiile Cauchy-Riemann**.

**Teorema 6.1.** *Fie $A\subset\mathbb{C}$ o mulţime deschisă . Funcţia $f\colon A\to\mathbb{C}$, $f=P+\mathrm{i}Q$ este olomorfă în $z_0\in A$ dacă şi numai dacă $P,Q\colon A\to\mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în $z_0=(x_0,y_0)$ şi derivatele lor parţiale în $(x_0,y_0)$ verifică condiţiile Cauchy-Riemann.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $f$ este olomorfă în $z_0\in A$ şi fie $f'(z_0)=a+\mathrm{i}b$. Definim

$$\beta(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0), & \text{pentru } z\in A, z\neq z_0\\ 0, & \text{pentru } z=z_0\end{cases}$$

Evident $\lim\limits_{z\to z_0}\beta(z)=0$.

Definim

$$\alpha(z)=\begin{cases}\beta(z)\frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & \text{pentru } z\in A, z\neq z_0\\ 0, & \text{pentru } z=z_0\end{cases}$$

Atunci $\lim\limits_{z\to z_0}|\alpha(z)|=\lim\limits_{z\to z_0}|\beta(z)|=0$, deci $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha(z)=0$. Putem scrie

$$f(z)-f(z_0)=c(z-z_0)+(z-z_0)\beta(z)=c(z-z_0)+\alpha(z)|z-z_0|. \quad (6.1)$$

Dar

$$f(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y), c=a+\mathrm{i}b, z-z_0=(x-x_0)+\mathrm{i}(y-y_0)$$

deci

$$P(x,y)-P(x_0,y_0)+\mathrm{i}(Q(x,y)-Q(x_0,y_0))=$$
$$=a(x-x_0)-b(y-y_0)+\mathrm{Re}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+$$
$$+\mathrm{i}[b(x-x_0)+a(y-y_0)+\mathrm{Im}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}]$$

Rezultă formulele

$$\begin{aligned}&P(x,y)-P(x_0,y_0)=a(x-x_0)-b(y-y_0)+\\&+\mathrm{Re}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\end{aligned}\tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}&Q(x,y)-Q(x_0,y_0)=b(x-x_0)+a(y-y_0)+\\&+\mathrm{Im}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\end{aligned}\tag{6.3}$$

unde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\mathrm{Re}\alpha(x,y)=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\mathrm{Im}\alpha(x,y)=0$, deci funcţiile $P$ şi $Q$ sunt diferenţiabile în $z_0=(x_0,y_0)$ şi atunci

$$\alpha=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0), b=-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

adică am obţinut condiţiile Cauchy-Riemann.

Reciproc, dacă $P$ şi $Q$ sunt diferenţiabile în $z_0=(x_0,y_0)$ şi au loc condiţiile Cauchy-Riemann, atunci avem

$$\begin{aligned}&P(x,y)-P(x_0,y_0)=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\\&+\alpha_1(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\end{aligned}\tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}&Q(x,y)-Q(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\\&+\alpha_2(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\end{aligned}\tag{6.5}$$

unde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha_1(x,y)=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha_2(x,y)=0$.

Notând $a=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0), b=-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$ şi $\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2$, obţinem din relaţiile (6.4) şi (6.5), relaţiile (6.2) şi (6.3), iar acestea sunt echivalente cu (6.1) dacă notăm $f'(z_0)=a+\mathrm{i}b$. Din (6.1) obţinem $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)=\beta(z-z_0)$, pentru $z\neq z_0$ şi atunci $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)=f'(z_0)\in\mathbb{C}$, deci $f$ este olomorfă în $z_0\in\mathbb{C}$.

In plus, avem

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0)=$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0)$$

□

**Corolarul 6.1.** *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$. Dacă $P, Q \in \mathcal{C}^1(A)$ şi dacă pentru $\forall z \in A$ au loc condiţiile Cauchy-Riemann, atunci $f$ este olomorfă pe $A$.*

*Demonstraţie.* Dacă $P, Q \in \mathcal{C}^1(A)$, atunci $P, Q$ sunt diferenţiabile în orice punct $z_0 \in A$. Având loc şi condiţiile Cauchy-Riemann în orice punct $z_0 \in A$ afirmaţia rezultă din Teorema 6.1. □

Notăm $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ şi $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (numită **derivata areolară a lui $f$ în $z_0$**).

**Corolarul 6.2.** *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$. Dacă $P, Q \in \mathcal{C}^1(A)$ şi $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ pe $A$, atunci funcţia $f$ este olomorfă pe $A$.*

*Demonstraţie.* Vom arăta că relaţia $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ pe $A$ este echivalentă cu condiţiile Cauchy-Riemann şi apoi aplicăm Corolarul 6.1. Intr-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

□

**Exemplul 6.1.** Să se arate că funcţia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|$ nu e olomorfă în nici un punct din $\mathbb{C}$.

*Demonstraţie.* Funcţia $f$ se scrie $f = P + \mathrm{i}Q$, unde $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $Q = 0$.

Avem $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ pentru $z \neq 0$.

Din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ şi $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, deci $x = y = 0$, adică $z = 0$. Dar, în punctul $z = 0$ funcţia $P$ nu are derivate parţiale, deci conform Teoremei 6.1, funcţia $f$ nu poate fi olomorfă în acest punct. □

**Exemplul 6.2.** Să se arate că funcţia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sqrt{|z^2 - \overline{z}^2|}$ este continuă în $z = 0$, satisface condiţiile Cauchy-Riemann în acest punct, dar nu este olomorfă .

*Demonstraţie.* $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0 = f(0)$, deci $f$ este continuă în $z = 0$

Dacă $z = x + \mathrm{i}y$, avem $f(z) = 2\sqrt{|xy|}$, deci $P(x, y) = 2\sqrt{|xy|}$ şi $Q = 0$.

$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{P(x, 0) - P(0, 0)}{x - 0} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0)$

$\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{P(0,y)-P(0,0)}{y-0} = 0 = -\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)$

Totuşi $f$ nu este olomorfă în $z=0$, deoarece $P$ nu e diferenţiabilă în acest punct. Presupunem că $P$ ar fi diferenţiabilă , deci

$$P(x,y) - P(0,0) = 0\cdot(x-0) + 0\cdot(y-0) + P_1(z)|z-0|,$$

unde $\lim_{z\to 0} P_1(z) = 0$.

Pentru $z \neq 0$ avem $P_1(z) = \frac{P(z)}{|z|} = \frac{2\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Luând $z = \frac{1}{n}, z_n' = \frac{1}{n} + \mathrm{i}\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ avem $z_n \longrightarrow 0, z_n' \longrightarrow 0$, dar $P_1(z_n) = 0 \longrightarrow 0, P_1(z_n') = \sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$, deci $P_1$ nu are limită în $(0,0)$. □

**Definiţia 6.5.** Fie $u\colon A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe deschisul $A$. Funcţia $u$ se numeşte **armonică** dacă pentru $\forall a \in A$ avem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) = 0$, adică $\Delta u = 0$ în orice punct din $A$.

**Corolarul 6.3.** *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$ şi $P, Q \in \mathcal{C}^2(A)$. Dacă $f$ este olomorfă pe $A$, atunci $P, Q$ sunt funcţii armonice pe $A$.*

*Demonstraţie.* Din condiţiile Cauchy-Riemann şi Teorema lui Schwartz avem

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0$$

□

**Definiţia 6.6.** Un deschis $D \subset \mathbb{C}$ este **conex** (deci un domeniu) dacă şi numai dacă pentru orice două puncte $z_1, z_2 \in D$ există un drum $\gamma\colon [a,b] \to D$ astfel ca $\gamma(a) = z_1$ şi $\gamma(b) = z_2$. Un domeniu $D$ se numeşte **simplu conex** dacă frontiera lui $D$ este conexă , adică orice curbă închisă cu suportul în $D$ se poate deforma continuu către un punct.

**Observaţia 6.3.** Se poate ară ta că aceasta este echivalent cu faptul că orice curbă închisă cu suportul în $D$ se poate deforma continuu către un punct. Coroana $K(z_0; r, R)$ nu este un domeniu simplu conex.

**Teorema 6.2.** *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex. Dacă funcţia $P\colon D \to \mathbb{R}$ este armonică pe $D$, atunci există funcţia $Q\colon D \to \mathbb{R}$ armonică pe $D$ astfel încât funcţia $f\colon D \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$ să fie olomorfă .*

*Demonstraţie.* Dacă ar exista funcţia $Q$ armonică pe $D$ astfel încât $f = P + \mathrm{i}Q$ să fie olomorfă pe $D$, atunci $Q$ ar verifica relaţiile Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$, deci $dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy$.

Considerăm forma diferenţială $\omega = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy = P_1dx + Q_1dy$.

Avem $\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$, deci $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$, deoarece $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, $P$ fiind armonică pe $D$. Aşadar, forma $\omega$ este închisă , deci $\omega$ este exactă deoarece $D$ este simplu conex. Atunci există funcţia $Q$ pe $D$, $Q \in \mathcal{C}^2(D)$ astfel încât $\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = dQ$. Rezultă relaţiile $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$, adică tocmai condiţiile Cauchy-Riemann. Aplicând Corolarul 6.1, rezultă că $f = P + \mathrm{i}Q$ este olomorfă pe $D$. □

**Observaţia 6.4.** Din relaţia $\omega = dQ$ rezultă că funcţia $Q$ este unică până la adăugarea unei constante reale, deci $f$ este unică până la adăugarea unei constante pur imaginare.

**Exemplul 6.3.** Să se determine funcţia olomorfă $f = P + \mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$, unde $Q(x, y) = \varphi(x^2 - y^2), \varphi \in \mathcal{C}^2$.

*Demonstraţie.* Notăm $\alpha = x^2 - y^2$.

Avem $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\varphi'(\alpha)$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -2y\varphi'(\alpha)$, deci $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2\varphi'(\alpha) + 4x^2\varphi''(\alpha)$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -2\varphi'(\alpha) + 4y^2\varphi''(\alpha)$

Cum $Q$ este armonică rezultă că $\Delta Q = 0$, deci

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)\varphi''(\alpha) = 0 \Longrightarrow \varphi''(\alpha) = 0 \Longrightarrow \varphi'(\alpha) = c \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \varphi(\alpha) = c\alpha + c_1 \Longrightarrow Q(x, y) = c(x^2 - y^2) + c_1, c, c_1 \in \mathbb{R}$$

Din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = -2cy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -2cx$$

Integrând a doua ecuaţie şi înlocuind în prima obţinem

$$P(x, y) = -2cxy + k,$$

deci $f(z) = -2cxy + k + \mathrm{i}(c(x^2 - y^2) + c_1) \Longrightarrow f(z) = c\mathrm{i}z^2 + d, c, d \in \mathbb{R}$ □

**Exemplul 6.4.** Fie $P(x, y) = \mathrm{e}^{2x}\cos 2y + y^2 - x^2$. Să se determine funcţia olomorfă $f = P + \mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$ astfel încât $f(0) = 1$.

*Demonstraţie.* Verificăm că funcţia $P$ este armonică .

Aplicăm condiţiile Cauchy-Riemann şi obţinem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{2x}\cos 2y - 2x$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2\mathrm{e}^{2x}\sin 2y - 2y$$

Integrăm a doua ecuaţie în raport cu $x$ şi obţinem

$$Q(x,y) = \mathrm{e}^{2x}\sin 2y - 2xy + c(y).$$

Inlocuind apoi în prima ecuaţie avem $c'(y) = 0$, deci $c(y) = k$. Atunci

$$f(z) = \mathrm{e}^{2x}\cos 2y + y^2 - x^2 + \mathrm{i}(\mathrm{e}^{2x}\sin 2y - 2xy + k) =$$

$$= \mathrm{e}^{2x}(\cos 2y + \mathrm{i}\sin 2y) - (x+\mathrm{i}y)^2 + k\mathrm{i} \Longrightarrow f(z) = \mathrm{e}^{2z} - z^2 + k\mathrm{i}.$$

Din condiţia din enunţ obţinem constanta $k$ : $f(0) = 1 \Longrightarrow k = 0$. Aşadar, $f(z) = \mathrm{e}^{2z} - z^2$. □

**Exemplul 6.5.** Să se arate că dacă $u$ şi $v$ sunt două funcţii armonice într-un domeniu $D$, condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f(z) = u + \mathrm{i}v$ să fie o funcţie olomorfă este ca funcţia $\varphi(x,y) = \ln[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]$ să fie armonică oricare ar fi constantele $\lambda$ şi $\mu$.

*Demonstraţie.* Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei $\varphi$. Avem

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (u+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2} -$$

$$-4\left[\frac{(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial x}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + (u+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (v+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2} -$$

$$-4\left[\frac{(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial y}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2}\right]$$

Cum funcţiile $u$ şi $v$ sunt armonice, adică $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, rezultă

$$(*)\ \ \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2} -$$

$$-4\frac{\left[(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \left[(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial y}\right]^2}{[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]^2} =$$

$$= 2\frac{[-(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]}{[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]^2} -$$

$$-4\frac{(u+\lambda)(v+\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{[(u+\lambda)^2+(v+\mu)^2]^2}.$$

Dacă funcţia $f$ este olomorfă avem $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, deci $\Delta\varphi=0$, adică funcţia $\varphi$ este armonică oricare ar fi $\lambda$ şi $\mu$ constante.

Dacă funcţia $\varphi$ este armonică oricare ar fi $\lambda$ şi $\mu$ constante, din relaţia (*) rezultă

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

de unde deducem condiţiile Cauchy-Riemann. □

**Funcţia exponenţială**

**Definiţia 6.7.** Se numeşte **exponenţiala complexă** funcţia $\exp\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\longrightarrow \mathrm{e}^z$, unde $\exp z=\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

**Proprietăţi :**

a) $\mathrm{e}^0=1$;

b) $\mathrm{e}^{z_1+z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2},\ \forall\ z_1,z_2\in\mathbb{C}$;

c) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y,\ \forall\ y\in\mathbb{R}$ (**formula lui Euler**);

d) funcţia exponenţială este olomorfă şi periodică de perioadă $2\pi$.

*Demonstraţie.* b) Considerăm seriile $\sum_{n\geq0}u_n=\sum_{n\geq0}\frac{z_1^n}{n!}, \sum_{n\geq0}v_n=\sum_{n\geq0}\frac{z_2^n}{n!}$. Atunci

$$w_n=\sum_{p=0}^{n}u_pv_{n-p}=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!(n-p)!}z_1^pz_2^{n-p}=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

Cum seria produs $\sum_{n\geq0}w_n=\sum_{p\geq0}u_p\sum_{q\geq0}v_q$, avem

$$\sum_{n\geq0}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\left(\sum_{p\geq0}\frac{z_1^p}{p!}\right)\cdot\left(\sum_{q\geq0}\frac{z_1^q}{q!}\right).$$

c) Avem

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\sum_{n\geq0}\frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!}=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^ny^{2n}}{(2n)!}+\ldots+$$

$$+\mathrm{i}\left(y-\frac{y^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^ny^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)=\cos y+\mathrm{i}\sin y$$

folosind dezvoltările în serie ale funcţiilor reale cos şi sin.

d) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ ave $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$, deci $\mathrm{Re}\exp = P(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y$ şi $\mathrm{Im}\exp = Q(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y$. Funcţiile $P$ şi $Q$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $\frac{\partial P}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} = -\mathrm{e}^x\sin y = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. Atunci conform Corolarului 6.1, funcţia exp este olomorfă pe $\mathbb{C}$.

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+2\pi)} = \mathrm{e}^x(\cos(y+2\pi) + \mathrm{i}\sin(y+2\pi)) =$$

$$= \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^z,$$

deci funcţia exp este periodică de perioadă $2\pi$. □

**Funcţia logaritm**

Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ fixat ne punem problema să aflăm toate soluţiile $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$ ale ecuaţiei $\mathrm{e}^w = z$. Folosind scrierea trigonometrică a unui complex, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, unde $r = |z|$, iar $\theta = \arg z$, obţinem $\mathrm{e}^u = |z|$, de unde rezultă $u = \ln|z|$ şi ţinând cont că funcţia exp este periodică de perioadă $2\pi$, avem $v = \arg z + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Aşadar, toate soluţiile ecuaţiei sunt $\mathrm{e}^w = z$, $z \in \mathbb{C}^*$ sunt $w = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}$.

**Definiţia 6.8.** Se numeşte **logaritmul numărului complex** $z \in \mathbb{C}^*$, mulţimea de numere complexe $\mathrm{Ln}z = \left\{ \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Funcţia $\mathrm{Ln}z$ este o funcţie multiformă (care asociază unei valori $z$ mai multe valori numerice). Funcţia logaritm are o infinitate de ramuri.

Pentru $k = 0$ obţinem **valoarea princpală** a logaritmului

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

**Exemplul 6.6.** Fie $z = -2\mathrm{i}$. Să se determine soluţiile $w \in \mathbb{C}$ ale ecuaţiei $\mathrm{e}^w = z$.

*Demonstraţie.* Cum $|z| = 2$, $\frac{z}{|z|} = -\mathrm{i}$, rezultă că $\arg z = \frac{3\pi}{2}$, deci soluţiile ecuaţiei sunt $\mathrm{Ln}(-2\mathrm{i}) = \left\{ \ln 2 + \mathrm{i}(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. □

**Funcţia putere**

Este o funcţie multiformă

$$z^m = \mathrm{e}^{m\mathrm{Ln}z} = \left\{ \mathrm{e}^{m(\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi))} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},\ \ m \in \mathbb{C}.$$

**Exemplul 6.7.** Calculaţi $\mathrm{i}^{\mathrm{i}}$.

*Demonstraţie.* $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}\mathrm{i}} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}(\arg(\mathrm{i}) + 2k\pi))} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} =$
$= \left\{ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. □

**Funcţia radical**

Este o funcţie multiformă $\sqrt[n]{z} = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w^n = z \right\},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dacă $z \neq 0$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, funcţia radical o definim cu ajutorul funcţiei putere şi scriem

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z} = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi))} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln|z|} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \left\{ \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$$

Dacă $n = 2$, $\sqrt{z}$ are două valori $z_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ şi $z_2 = -\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ ce sunt funcţii multiforme, numite **ramurile funcţiei**. Valorile ramurilor $z_1$ şi $z_2$ se schimbă între ele ori de câte ori argumentul lui $z$ creşte cu $2\pi$, adică atunci când $z$ descrie o curbă ce înconjoară originea. Din această cauză $z = 0$ se numeşte **punctul critic** sau **punctul de ramificaţie** al funcţiei $\sqrt{z}$. Prin urmare, funcţiile $z_1$ şi $z_2$ devin uniforme făcând în planul $z$ o tăietură de-a lungul unei semidrepte care pleacă din origine, de exemplu semiaxa pozitivă . Aceasta înseamnă că variabila $z$ este supusă restricţiei de a nu putea traversa această semidreaptă . In felul acesta argumentul variabilei $z$ nu poate să crească cu un multiplu de $2\pi$ şi, prin urmare, $z_1$ şi $z_2$ au o valoare unică în fiecare punct al planului $z$. Să presupunem că am făcut tăietura de-a lungul unei semidrepte care face cu axa $Ox$ unghiul $\theta$. Pe o parte a tăieturii, în punctul $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, funcţia $z_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{2}}$, iar pe cealaltă parte, în acelaşi punct, valoarea $\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = -\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$, deoarece argumentul lui $z$ a crescut cu $2\pi$. Aceeaşi observaţie pentru funcţia $z_2$. Funcţiile $z_1$ şi $z_2$ nu sunt continue în punctele tăieturii.

Se poate imagina, după Riemann, o suprafaţă pe care cele două ramuri $z_1$ şi $z_2$ să formeze o singură funcţie uniformă . Pentru aceasta considerăm două plane complexe tăiate de-a lungul semiaxei pozitive şi aşezate unul peste altul astfel încât marginea inferioară a tăieturii planului de deasupra să coincidă cu marginea superioară a tăieturii planului de dedesubt, iar marginea inferioară a acestuia din urmă să coincidă cu marginea superioară a tăieturii celuilalt. Se obţine astfel o suprafaţă cu două foi, numită **suprafaţa lui Riemann**. Pentru valorile variabilei $z$ de pe prima foaie, unde argumentul lui $z$ variază de la 0 la $2\pi$, obţinem valorile funcţiei $z_1$, iar pentru cele de pe a doua foaie, unde argumentul lui $z$ variază de la $2\pi$ la $4\pi$, valorile funcţiei $z_2$. Pe această suprafaţă funcţiile $z_1$ şi $z_2$ formează o singură funcţie uniformă Corespondenţa dintre punctele suprafeţei lui Riemann şi valorile funcţiei $\sqrt{z}$ este biunivocă .

Pentru funcţia $\sqrt[n]{z}$, $n > 2$, suprafaţa lui Riemann este analoagă ce aceea a funcţiei $\sqrt{z}$ însă are $n$ foi.

**Exemplul 6.8.** Să se rezolve ecuaţia $z^3 + 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

*Demonstraţie.* Avem ecuaţia $z^3 = 2(-1 + \mathrm{i})$. Cum $|w| = |-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ şi $\frac{w}{|w|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$, rezultă $\arg w = \frac{3\pi}{4}$.

Deci $z = \left\{ \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}} \mid k = 0, 1, 2 \right\} = \left\{ \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} \mid k = 0, 1, 2 \right\} = \left\{ \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \mid k = 0, 1, 2 \right\}$.

Aşadar, $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. □

**Funcţiile trigonometrice complexe**

Pentru orice $\in \mathbb{C}$, definim funcţiile cos şi sin prin

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \ \ \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

Se verifică relaţiile

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\cos^2 z + \sin^2 = 1$$

Definim $\mathrm{tg} : \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{tg}\, z = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}$ şi

$$\mathrm{ctg} : \mathbb{C} \setminus \left\{k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C}, \ \ \mathrm{ctg}\, z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}$$

Funcţiile $\sin, \cos, \mathrm{tg}\,, \mathrm{ctg}$ sunt funcţii uniforme (nu sunt multiforme) şi toate formulele trigonometrice din cazul real ramân valabile.

Se definesc şi funcţiile hiperbolice complexe

$$\mathrm{sh}z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \ \ \mathrm{ch}z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \ \ \mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} \ \ (\text{pentru ch}\neq 0$$

Se observă că $\mathrm{sh}z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z), \mathrm{ch} = \cos(\mathrm{i}z)$.

Inversarea funcţilor trigonometrice complexe conduce la alte funcţii multiforme. Astfel, rezolvând ecuaţia $z = \sin w$, rezultă :

$$z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}} \ \ \text{sau} \ \ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 1 = 0,$$

de unde $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2}$ şi $\mathrm{i}w = \mathrm{Ln}(\mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2})$. Atunci se defineşte

$$\mathrm{Arcsin}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(\mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

Analog se definesc

$$\mathrm{Arccos}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\mathrm{Arctg}z = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z} \ \ \text{etc.}$$

**Exemplul 6.9.** Să se calculeze $z_1 = \sin(1 + \mathrm{i})$.

*Demonstraţie.* Avem $z_1 = \sin 1 \cos \mathrm{i} + \sin \mathrm{i} \cos 1 = \sin 1 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}}{2\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}}{2} \cos 1 =$
$= \frac{1}{2\mathrm{e}}[(\mathrm{e}^2 + 1)\sin 1 + \mathrm{i}(\mathrm{e}^2 - 1)\cos 1]$ □

**Exemplul 6.10.** Să se calculeze $z_2 = \mathrm{sh}(1 - \mathrm{i})$.

*Demonstraţie.* $z_2 = \mathrm{sh}(1 - \mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}-1}}{2} = \frac{\mathrm{e}(\cos 1 + \mathrm{i}\sin 1) - \mathrm{e}^{-1}(\cos 1 - \mathrm{i}\sin 1)}{2} =$
$= \frac{1}{2\mathrm{e}}[(\mathrm{e}^2 - 1)\cos 1 - \mathrm{i}(\mathrm{e}^2 + 1)\sin 1]$ □

**Exemplul 6.11.** Să se calculeze $z_3 = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\ln 3\right)$.

*Demonstraţie.* Avem $z_3 = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\ln 3\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\ln 3\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\ln 3\right)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\ln 3\right)}}$.

Cum $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\ln 3\right)} = \mathrm{e}^{\ln 3}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$.

Atunci $z_3 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})+\frac{2}{3\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})-\frac{2}{3\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}} = \frac{11+7\mathrm{i}}{7+11\mathrm{i}} = \frac{77-36\mathrm{i}}{85}$. □

**Exemplul 6.12.** Să se calculeze $z_4 = \operatorname{th}\left(\ln 2 + \frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)$.

*Demonstraţie.* Avem $z_4 = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2+\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}-\mathrm{e}^{-\left(\ln 2+\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)}}{\mathrm{e}^{\ln 2+\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}+\mathrm{e}^{-\left(\ln 2+\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\right)}}$, dar $\mathrm{e}^{\ln 2+\frac{\pi\mathrm{i}}{4}} = \mathrm{e}^{\ln 2}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}} =$
$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+\mathrm{i})$. Atunci $z_4 = \frac{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})-\frac{1}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})+\frac{1}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}} = \frac{4\mathrm{i}-1}{4\mathrm{i}+1} = \frac{15+8\mathrm{i}}{17}$.
□

**Exemplul 6.13.** Să se rezolve ecuaţia $\sin z = 2$.

*Demonstraţie.* Avem $z = -\mathrm{iLn}(2\mathrm{i}+\sqrt{1-4}) = -\mathrm{iLn}(2\mathrm{i}\pm\mathrm{i}\sqrt{3}) =$
$= -\mathrm{iLn}[\mathrm{i}(2\pm\sqrt{3})] = -\mathrm{i}[\ln(2\pm\sqrt{3})+\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)] = \frac{\pi}{2}+2k\pi-\mathrm{i}\ln(2\pm\sqrt{3}) =$
$= \frac{\pi}{2}+2k\pi\pm\mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3})$, deoarece $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $|\mathrm{i}(2\pm\sqrt{3})| = 2\pm\sqrt{3}$ şi $\arg[\mathrm{i}(2\pm\sqrt{3})] = \frac{\pi}{2}$. □

**Exemplul 6.14.** Să se calculeze $z_5 = \operatorname{Arccos}(\mathrm{i}\sqrt{3})$.

*Demonstraţie.* Avem $z_5 = -\mathrm{iLn}(\mathrm{i}\sqrt{3}+\sqrt{(\mathrm{i}\sqrt{3})^2-1} = -\mathrm{iLn}(\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}) =$
$= -\mathrm{i}[\ln(\sqrt{3}+2)+\mathrm{i}(2k\pi+\frac{\pi}{2})] = \frac{4k+1}{2}\pi-\mathrm{i}\ln(\sqrt{3}+2)$. □

**Exemplul 6.15.** Să se calculeze $z_6 = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}\right)$.

*Demonstraţie.* Avem $z_6 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}}{\mathrm{i}+\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}$.

Cum $\left|\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$ şi $\frac{z}{|z|} = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $\arg\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{3}$.
Aşadar, $z_6 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\ln\frac{2}{3+\sqrt{5}}+\mathrm{i}\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{3k+1}{3}\pi-\frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. □

**Exemplul 6.16.** Să se demonstreze egalităţile :
a) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$
b) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$
unde $z = x + \mathrm{i}y$.

*Demonstraţie.* a) Avem $\sin z = \sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x\cos\mathrm{i}y + \sin\mathrm{i}y\cos x$. Dar $\cos\mathrm{i}y = \operatorname{ch}y, \sin\mathrm{i}y = \mathrm{i}\cdot\operatorname{sh}y$, deci $\sin z = \sin x\cdot\operatorname{ch}y + \mathrm{i}\cos x\cdot\operatorname{sh}y$.

De aici deducem $|\sin z|^2 = \sin^2 x\cdot\operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 y$.

Ţinând cont că $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, rezultă $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$.

b) Analog avem

$$\cos z = \cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cos \mathrm{i}y - \sin x \sin \mathrm{i}y = \cos x \cdot \mathrm{ch}y - \mathrm{i} \sin x \cdot \mathrm{sh}y,$$

deci $|\cos z|^2 = \cos^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 + \sin^2 x \cdot \mathrm{sh}^2 y$, adică $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y$. $\square$

## 6.2 Integrala complexă . Teorema lui Cauchy. Formula integrala Cauchy

Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $\gamma\colon [a,b] \to A$ un drum (curbă ) de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni. Fie $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă continuă , $f = P + \mathrm{i}Q$.

Notăm $\gamma(t) = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, deci $x, y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni. Drumul $\gamma^-\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ este drumul opus lui $\gamma$, $\gamma^- = \gamma(a+b-t)$.

Fie $\triangle_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ care împarte drumul $\gamma$ în $n$ arce $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$. Inceputul arcului $l_k$ este punctul $z_k = \gamma(t_k)$ şi sfârşitul lui $l_k$ este punctul $z_{k+1} = \gamma(t_{k+1})$. Alegem $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ o valoare arbitrară şi scriem $\zeta_k = \gamma(\tau_k) = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k$.

**Definiţia 6.9.** Suma $\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$ se numeşte **sumă integrală complexă** (relaiv la $\gamma, f, \triangle_n, \zeta_k$).

Notăm cu $\nu(\triangle_n) = \max\left\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}\right\}$ norma diviziunii $\triangle_n$.

**Lema 6.1.** *In condiţiile anterioare, pentru orice alegere a punctelor $\zeta_k$, există limita*

$$\lim_{\nu(\triangle_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \int_\gamma P dx - Q dy + \mathrm{i} \int_\gamma Q dx + P dy$$

*(două integrale curbilinii reale).*

*Demonstraţie.* Avem $f(\zeta_k) = P(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}Q(\xi_k, \eta_k)$ şi

$$z_{k+1} - z_k = (x_{k+1} - x_k) + \mathrm{i}(y_{k+1} - y_k).$$

Deci

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k) +$$

$$+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k)$$

Din ipoteză $f$ este continuă , deci $P$ şi $Q$ sunt continue, iar $x$ şi $y$ sunt funcţii de clasă $C^1$ pe porţiuni. Rezultă că

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k) \longrightarrow \int_\gamma P dx \text{ şi } \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k) \longrightarrow \int_\gamma Q dy, \text{ etc.}$$

□

**Definiţia 6.10.** Limita

$$\lim_{\nu(\triangle_n)\to 0(\text{orice } \zeta_k)} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)$$

se numeşte **integrala complexă a funcţiei $f$ de-a lungul curbei $\gamma$** şi se notează cu $\int_\gamma f(z)dz$.

**Corolarul 6.4.** *Avem* $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt$, *unde*

$$\gamma: \quad z = z(t), \quad t \in [a,b].$$

*Demonstraţie.* Din Lema 6.1 avem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma P dx - Q dy + \mathrm{i}\int_\gamma Q dx + P dy.$$

Dar

$$\int_\gamma P dx - Q dy = \int_a^b [P(x(t),y(t))\cdot x'(t) - Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt$$

$$\int_\gamma Q dx + P dy = \int_a^b [Q(x(t),y(t))\cdot x'(t) + P(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt,$$

deci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b [P(x(t),y(t))+\mathrm{i}Q(x(t),y(t))](x'(t)+\mathrm{i}y'(t))dt = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt.$$

Aşadar, o integrală complexă revine la o pereche de integrale Riemann reale.

□

**Proprietăţile integralei complexe :**

1. (**schimbarea sensului**) $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$
2. (**liniaritatea**) $\forall \lambda,\mu \in C$ şi $f,g\colon A\to\mathbb{C}$ continuă ,

$$\int_\gamma \lambda f(z)+\mu g(z)dz = \lambda\int_\gamma f(z)dz + \mu\int_\gamma g(z)dz$$

3. (**aditivitatea**) Fie $\gamma_1\colon [a,b]\to A$, $\gamma_2\colon [b,c]\to A$ drumuri de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni cu $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ şi $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$. Atunci
$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

4. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le\int_\gamma |f(z)|dz$ .

5. (**limitarea modulului integralei**) Fie $L$ lungimea drumului $\gamma$ şi fie $M=\sup\limits_{z\in A}|f(z)|<\infty$. Atunci $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le ML$.

**Exemplul 6.17.** Să se calculeze integralele $I_1=\int_{|z|=1} z|dz|, I_2=\int_S z|dz|$, unde cercul unitate este parcurs pozitiv o singură dată , iar $S$ e segmentul care uneşte 0 şi i.

*Demonstraţie.* $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t\in[0,2\pi]\Longrightarrow dz=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt\Longrightarrow |dz|=dt\Longrightarrow I_1=$
$=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt=\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/_0^{2\pi}=0$
Segmentul $S$ are reprezentarea parametrică $z=t\mathrm{i}, t\in[0,1]\Longrightarrow dz=$
$=\mathrm{i}dt\Longrightarrow |dz|=dt\Longrightarrow I_2=\int_0^1 t\mathrm{i}dt=\frac{\mathrm{i}}{2}$ □

**Exemplul 6.18.** Să se calculeze integrala complexă $\int_\gamma(z^2+1)dz$, unde $\gamma$ e semidiscul $\left\{z\in\mathbb{C}/|z|\le r, \mathrm{Im}z\ge 0\right\}$ cu $r>1$.

*Demonstraţie.* $\gamma$ este reuniunea curbelor $\delta$, unde $\delta(t)=(2t-1)r, t\in[0,1]$ şi $\sigma$, unde $\sigma(t)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t\in[0,\pi]$
Atunci $\int_\gamma(z^2+1)dz=\int_\delta(z^2+1)dz+\int_\sigma(z^2+1)dz=$
$=\int_0^1(2t-1)^2r^2 2rtdt+\int_0^\pi r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$ etc. □

**Definiţia 6.11.** Fie $\gamma_1,\gamma_2\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ două drumuri parametrizate continue, care au aceleaşi capete $c=\gamma_1(a)=\gamma_2(a), d=\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$. Vom spune că $\gamma_1$ **este omotop cu** $\gamma_2$ dacă există o funcţie continuă $\varphi\colon[a,b]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ cu proprietăţile:

1. $\varphi(t,0)=\gamma_1(t);\varphi(t,1)=\gamma_2(t),\forall t\in[a,b]$;

2. $\varphi(a,u)=c;\varphi(b,u)=d,\forall u\in[0,1]$

şi vom scrie $\gamma_1\sim\gamma_2$. Funcţia $\varphi$ se numeşte **deformare continuă a lui** $\gamma_1$ **în** $\gamma_2$ .

**Definiţia 6.12.** Dacă $\alpha\in\mathbb{C}$ este un punct fixat vom numi **drumul nul (zero) al lui** $\alpha$, drumul $0\colon[a,b]\to\mathbb{C}$, $0(t)=\alpha,\forall t\in[a,b]$. Dacă $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ este un drum închis ( continuu) de capăt $\alpha$ ($\gamma(a)=\gamma(b)=\alpha$), vom spune că drumul $\gamma$ este **omotop cu zero** şi vom scrie $\gamma\sim 0$, dacă există o deformare continuă a lui $\gamma$ în 0.

**Teorema 6.3.** *(**Cauchy**) Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f\colon D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $D$ astfel încât $P = Ref, Q = Imf$ să fie de clasă $\mathcal{C}^1(D)$. Dacă $\gamma\colon [a,b] \to D$ este o curbă închisă jordaniană (i.e. o curbă fără autointersecţii în $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni astfel încât compactul $Int\gamma$ să verifice condiţiile formulei Green-Riemann, atunci $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

*Demonstraţie.* Aplicând formula Green-Riemann obţinem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma Pdx - Qdy + \mathrm{i}\int_\gamma Qdx + Pdy =$$

$$= \int\int_K \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy, \text{ unde } K = \overline{\mathrm{Int}\gamma}.$$

Cum $f$ este olomorfă au loc condiţiile Cauchy-Riemann, deci cele două integrale duble sunt nule. □

Teorema 6.3 se poate enunţa şi demonstra şi în condiţii mai generale.

**Teorema 6.4.** *Dacă $f\colon D \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă pe un deschis $D$ şi $\gamma$ este un drum închis jordanian de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, situat în $D$ şi omotop cu zero, atunci $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

**Corolarul 6.5.** *Fie $f\colon D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe un domeniu simplu conex $D \subset \mathbb{C}$ şi fie $\gamma_1, \gamma_2$ două drumuri de clasă $\mathcal{C}^1$ având aceleaşi capete şi situate în $D$. Atunci $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.*

*Demonstraţie.* Fie $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1^-$. Drumul $\gamma$ este închis şi aplicăm Teorema 6.3. Rezultă

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

□

**Exemplul 6.19.** Să se calculeze integrala $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z \sin z}{1-z^3} dz$.

*Demonstraţie.* Conform Teoremei lui Cauchy rezultă că

$$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z \sin z}{1-z^3} dz = 0.$$

□

Fie $C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z-a| = r > 0\}$ un cerc considerat ca un drum închis jordanian de clasă $\mathcal{C}^1$, orientat pozitiv (parcurs o singură dată în sens trigonometric direct).

**Lema 6.2.** *Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem*

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i}, & n = -1 \end{cases}$$

*Demonstraţie.* Fie $z(t) = a + re^{it}, t \in [-\pi, \pi]$ parametrizarea cercului.

Avem $z'(t) = rie^{it}$. Deci

$$\int_C (z-a)^n dz = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n rie^{it} dt = r^{n+1} i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Dacă $n \neq -1$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+1)t dt + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+1)t dt = 0.$$

Dacă $n = -1$, atunci $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0t} dt = 2\pi$, deci $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$. □

**Teorema 6.5.** ***(formula integrală a lui Cauchy)*** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $D$. Fie $\overline{\triangle} \subset D$, unde $\triangle$ este un domeniu simplu conex, mărginit cu frontiera $\gamma$ o curbă închisă jordaniană , de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, orientată pozitiv. Atunci, pentru orice punct $a \in \triangle$ fixat, are formula*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

*Demonstraţie.* Alegem două discuri $\overline{B}(a; r_0) \subset \overline{B}(a; \rho) \subset \triangle$ şi fie $C$ frontiera discului $\overline{B}(a; \rho)$ orientată pozitiv. In domeniul $D \setminus \overline{B}(a; \rho)$ funcţia $\frac{f(z)}{z-a}$ este olomorfă . Deci $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$.

Acum putem scrie

$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz + \int_C \frac{f(a)}{z-a} dz = I + f(a) \int_C \frac{1}{z-a} dz = I + 2\pi i f(a)$, unde $I = \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz$. Vom arăta că $I = 0$. Funcţia $f$ este olomorfă în $a$, deci continuă în $a$. Pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|z-a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Deoarece discurile erau alese arbitrar, vom lua $\rho < \delta$ şi atunci rezultă

$$|I| = \left| \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz \right| \leq \int_C \frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|} ds < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \int_C ds = \varepsilon$$

Dar $\varepsilon$ este arbitrar ($\varepsilon \longrightarrow 0$), deci obţinem $I = 0$ şi atunci

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

□

**Exemplul 6.20.** Să se calculeze integrala $\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4} dz$.

*Demonstraţie.* Scriem integrala astfel

$$\int_{|z-2\mathrm{i}|=1} \frac{1}{z^2+4}dz = \int_{|z-2\mathrm{i}|=1} \frac{\frac{1}{z+2\mathrm{i}}}{z-2\mathrm{i}}dz = \int_{|z-2\mathrm{i}|=1} \frac{f(z)}{z-2\mathrm{i}},$$

unde $f(z) = \frac{1}{z+2\mathrm{i}}$

Aplicăm formula integrală a lui Cauchy şi obţinem :

$$f(2\mathrm{i}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z-2\mathrm{i}|=1} \frac{f(z)}{z-2\mathrm{i}} \Longrightarrow \int_{|z-2\mathrm{i}|=1} \frac{f(z)}{z-2\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i} f(2\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{4\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}.$$

□

**Exemplul 6.21.** Să se calculeze integrala $\int_{|z|=r} \frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^3}dz$, pentru $r > 1$.

*Demonstraţie.* Din formula integrală a lui Cauchy obţinem

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

Atunci $\int_{|z|=r} \frac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^3}dz = \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}} f''(1) = 3\pi\mathrm{i}\mathrm{e}$, unde $f(z) = z\mathrm{e}^z$. □

## 6.3 Funcţii analitice complexe. Dezvoltări în serie Laurent

**Definiţia 6.13.** Seria $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, unde $z \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$ fixat, $a_n \in \mathbb{C}$ se numeşte **serie de puteri centrată în punctul** $z_0$.

**Definiţia 6.14.** Fie $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}/r \geq 0,\ \text{seria} \sum_{n\geq 0} a_n|r|^n \text{convergentă}\ \right\}$.

Numărul $R$ se numeşte **rază de convergenţă** , iar discul $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\ |z-z_0| < R\}$ se numeşte **discul de convergenţă** . Convenţie : pentru $R = 0, B(z_0, R) = \{z_0\}$, iar pentru $R = \infty, B(z_0, R) = \mathbb{C}$.

**Teorema 6.6.** *(**Cauchy- Hadamard**) Fie o serie de puteri cu raza de convergenţă $R$. Atunci* $R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

**Teorema 6.7.** *(**Teorema lui Abel**) Fie seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *cu raza de convergenţă $R$. Atunci*

1. *seria este absolut convergentă dacă $|z| < R$;*
2. *seria este divergentă $|z| > R$;*
3. *seria este uniform convergentă pe $|z| \leq \rho$, oricare ar fi $\rho < R$.*

**Teorema 6.8.** *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat şi $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n, \forall z$ cu $|z-z_0| < R$ suma seriei centrate în punctul $z_0$, unde $R$ este raza de convergenţă . Atunci funcţia $S(z)$ este olomorfă în orice punct $z \in B(z_0, R)$ şi*

$$S'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \forall z \in B(z_0, R).$$

**Corolarul 6.6.** *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat şi $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n, \forall z$ cu $|z-z_0| < R$ suma seriei centrate în punctul $z_0$, unde $R$ este raza de convergenţă . Atunci funcţia $S(z)$ are derivate complexe de orice ordin în orice punct $z \in B(z_0, R)$ şi $a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}$.*

**Definiţia 6.15.** Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă . Funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ se numeşte **analitică** pe $A$ dacă $\forall z_0 \in A$, există o serie formală $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ convergentă într-un disc de rază $R > 0$ astfel încât există discul $B(z_0, r) \subset A$, $0 < r \leq R$ cu proprietatea

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n, \ \ \forall z \in B(z_0; r).$$

**Propoziţia 6.1.** *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie analitică pe $A$. Atunci există derivatele complexe de orice ordin ale lui $f$ în $A$ şi într-o vecinătate a oricărui punct $z_0 \in A$ avem*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Noţiunile de analiticitate şi olomorfie sunt echivalente şi vom evidenţia acest fapt în următoarea teoremă :

**Teorema 6.9.** ***(Weierstrass-Riemann-Cauchy)*** *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă . Atunc $f$ este analitică pe $A$ dacă şi numai dacă $f$ este olomorfă pe $A$.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $f$ este analitică pe $A$. Fie $z_0 \in A$ un punct oarecare. Atunci există $B(z_0; r) \subset A$ $(r > 0)$ astfel încât

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n, \ \ \forall \ z \in B(z_0; r).$$

Deoarece $f(z_0) = c_0$ putem scrie $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n\geq 1} c_n (z-z_0)^{n-1}$ pentru $z \neq z_0$, $z \in B(z_0; r)$ şi atunci $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = c_1 \in \mathbb{C}$.

Reciproc, presupunem că $f$ este olomorfă pe $A$ şi fie $z_0 \in A$ un punct fixat oarecare. Fie $\rho = d(z_0, \mathrm{Fr}A)$ şi fie $B(z_0; r) \subset A$ cu $0 < r < \rho$. Fie $C = \mathrm{Fr}B(z_0; r)$, circumferinţa parcursă în sens trigonometric direct. Atunci, din formula integrală a lui Cauchy, rezultă

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(u)}{u - z} du, \ \ \forall \ z \in B(z_0; r).$$

Scriem

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{(u - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{u - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}}$$

şi notând $w = \frac{z - z_0}{u - z_0}$ ($u \in \mathbb{C}$, deci $u \neq z_0$) avem $|w| = \left| \frac{z - z_0}{u - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$. Atunci seria $\sum_{n \geq 0} w^n$ este convergentă şi $\sum_{n \geq 0} w^n = \frac{1}{1 - w}$, deci obţinem

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left( \frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n; \ \ \frac{f(u)}{u - z} = \sum_{n \geq 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}.$$

Pentru $z \in B(z_0; r)$ fixat putem scrie

$$\left| f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} \right| \leq \sup_{u \in C} |f(u)| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} = M \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}},$$

deoarece $|f|$ este o funcţie continuă pe compactul $C \subset A$. Rezultă că seria de funcţii $\sum_{n \geq 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}$ este majorată (în modul) de seria numerică convergentă $\frac{M}{r} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{|z - z_0|^n}{r^n} \right)$ (o progresie geometrică cu raţia $\frac{|z - z_0|}{r} < 1$). Atunci, conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcţii converge uniform în raport cu $u \in C$ ($C$ compact) şi poate fi integrată termen cu termen (părţile reală şi imaginară converg uniform şi aplicăm rezultatele de la integrale reale). Aşadar obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \sum_{n \geq 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n \geq 0} \left( \int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du \right) \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n,$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $c_n$ nu depinde de punctul $z$, ci numai de $f$ şi de $z_0$ şi cum seria $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ ese convergentă pentru orice $z \in B(z_0; r)$, rezultă că funcţia $f$ este analitică pe $A$. □

**Observaţia 6.5.** Din demonstraţie rezultă că , pentru o funcţie olomorfă $f$ pe $A$, seria $\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$ este convergentă la $f(z)$ în discul $B(z_0;\rho)$ ( $0<r<\rho$, cu $r$ arbitrar), unde $\rho$ este distanţa de la punctul $z_0$ la frontiera deschisului $A$).

**Definiţia 6.16.** Se numeşte **serie Laurent centrată în punctul** $z_0\in\mathbb{C}$ orice serie de funcţii de forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, a_n\in\mathbb{C}$.

**Definiţia 6.17.** Seria $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, a_n\in\mathbb{C}$ se numeşte **convergentă** dacă seriile $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ şi $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ sunt simultan convergente.

**Definiţia 6.18.** Seria $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ se numeşte **partea principală a seriei Laurent**, iar seria $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ numeşte **partea Taylor a seriei Laurent**.

**Teorema 6.10.** *Fie seria Laurent* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ *şi fie* $r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{-n}|}, \frac{1}{R}=$ $=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$*; presupunem că* $0\leq r<R$*. Atunci :*

*a) In coroana circulară* $B(z_0;r,R)=\{z\in\mathbb{C}/r<|z-z_0|<R\}$ *seria Laurent converge absolut şi uniform pe compacţi.*

*b) In mulţimea* $\mathbb{C}\setminus\overline{B(z_0;r,R)}$ *seria Laurent diverge.*

*c) Suma seriei Laurent* $S(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ *este o funcţie olomorfă pe coroana* $B(z_0;r,R)$*.*

*Demonstraţie.* a) Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ are raza de convergenţă $R$ şi converge absolut şi uniform convergent pe compacţi în discul $B(z_0;R)=\{z\in\mathbb{C}|\ |z-z_0|<R\}$. Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n\geq 0} a_{-n}w^n$ (am notat $w=\frac{1}{z-z_0}$) are raza de converenţă $\frac{1}{r}$, deci converge absolut şi uniform pe compacţi în discul $B(0,\frac{1}{r})=\{w\in\mathbb{C}|\ |w|<\frac{1}{r}\}$, deci în exteriorul discului $\overline{B}(z_0,r)$ ($|w|<\frac{1}{r}\iff|z-z_0|>r$). Deci, seria Laurent (ca sumă a celor două serii de funcţii) converge absolut şi uniform pe compacţi în coroana circulară $B(z_0;r,R)$.

b) In $\mathbb{C}\setminus B(z_0;r,R)$ seria Laurent este suma a două serii, dintre care una este convergentă şi cealaltă divergentă , deci este divergentă .

c) Conform Teoremei 6.8, funcţia $S_1(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ este olomorfă pentru orice $z\in\mathbb{C}$ cu $|z-z_0|<R$ şi funcţia $S_2(w)=\sum_{n\geq 0} a_{-n}w^n$ este olomorfă

pentru orice $w \in \mathbb{C}$ cu $|w| < \frac{1}{r}$.

Funcţia $\{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| > r\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} |\ |w| < \frac{1}{r}\}$, $z \longrightarrow w = \frac{1}{z-z_0}$ este olomorfă , deci compunerea $S_2(z) = \sum_{n\geq 0} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ este o funcţie olomorfă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z - z_0| > r$. Atunci $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ este o funcţie olomorfă pentru orice $z \in B(z_0; r; R)$. Mai mult, $S'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n (z - z_0)^{n-1}$. □

**Teorema 6.11.** *Fie $f\colon B(z_0; r, R) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana circulară $D = B(z_0; r, R)(0 \leq r < R)$. Atunci există o unică serie Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ a cărei coroană de convergenţă include coroana $D$ astfel încât în $D$ avem $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$.*

**Exemplul 6.22.** Să se dezvolte în serie de puteri ale lui $z$ funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

în următoarele domenii:

a) $|z| < 1$;

b) $1 < |z| < 2$;

c) $2 < |z| < 3$;

d) $|z| > 3$.

*Demonstraţie.* Funcţia $f$ are ca poli rădăcinile ecuaţiei $z^3-6z^2+11z-6 = 0$, adică punctele $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$.

a) In cercul $|z| < 1$, funcţia $f$ este olomorfă , deci dezvoltabilă în serie Taylor în acest domeniu.

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2(z-3)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$

In acest domeniu avem $|z| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1$.

Atunci $f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^n}$

b) In coroana circulară $1 < |z| < 2$, funcţia $f$ este dezvoltabilă în serie Laurent.

$f(z) = \frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$

In domeniul $1 < |z| < 2$ avem $\left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, deci $f(z) =$

$= \frac{1}{2z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^n}$

$f(z) = \frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$

c) In domeniul $2 < |z| < 3$ avem $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$.

Atunci $f(z)=\frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n}-\frac{1}{6}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}}$.

d) $f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$

In acest domeniu $\left|\frac{1}{z}\right|<1,\left|\frac{2}{z}\right|<1,\left|\frac{3}{z}\right|<1$.

Atunci $f(z)=\frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n}+\frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{3^n}{z^n}$. □

**Exemplul 6.23.** Să se dezvolte funcţia $f(z)=\frac{2z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1}$ în jurul originii şi în jurul lui $z=\pm 1$.

*Demonstraţie.* $z^3+z^2-z-1=0\Longrightarrow(z-1)(z+1)^2=0$, deci $z=1$ e pol simplu, iar $z=-1$ e pol dublu

Scriem $f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}$

Cum $\frac{1}{z+1}=\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n z^n$, prin derivare obţinem

$-\frac{1}{(z+1)^2}=\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n n z^{n-1}=\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^{n+1}(n+1)z^n$.

In cercul $|z|<1$, $f$ este olomorfă şi $f(z)=-\sum\limits_{n\geq 0}z^n+\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n z^n+$

$+\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)z^n$

Pentru a dezvolta în jurul punctului $z=-1$ scriem

$f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}$.

In cercul $|z+1|<2$ avem $\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$.

Deci $f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$.

Avem $f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2}$. In cercul $|z-1|<2$, $\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$ şi $\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2}=\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(n+1)(z-1)^n}{2^n}$.

Atunci $f(z)=\frac{1}{z-1}+\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{n+3}{2^{n+2}}(z-1)^n$. □

**Exemplul 6.24.** Să se dezvolte funcţia $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ în jurul punctului $z=1$.

*Demonstraţie.* Avem $\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}$.

Se ştie că

$\sin\frac{1}{z-1}=\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$

$\cos\frac{1}{z-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}}$

Atunci $f(z) = \sin 1 \cdot \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \cos 1 \cdot \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$

□

## 6.4 Puncte singulare. Reziduuri. Teorema reziduurilor

**Definiţia 6.19.** Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă nevidă şi fie $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $A$. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte **punct singular izolat al lui** $f$ dacă există un disc $B(z_0, r)(r > 0)$ astfel încıt $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset A$ (adică funcţia $f$ este olomorfă pe discul punctat $B(z_0; 0, r) = B(z_0, r)\setminus\{z_0\}$).

Pe coroana $B(z_0; 0, r)$ funcţia olomorfă $f$ are o dezvoltare în serie Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

**Exemplul 6.25.** Punctul $z = 2$ este un punct singular izolat pentru fiecare din funcţiile $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $f(z) = z^2$,$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z-2}$.

**Exemplul 6.26.** Punctele $z = 0, \pm i$ sunt puncte singulare izolate ale funcţiei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$.

**Definiţia 6.20.** Fie $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă , unde $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă nevidă şi fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat al lui $f$. Punctul singular izolat $z_0$ se numeşte **punct singular aparent** dacă seria Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ are partea principală nulă , adică $a_n = 0, \forall n < 0$.

**Definiţia 6.21.** Punctul singular izolat $z_0$ se numşte **pol** dacă în seria Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ partea principală are un număr finit de termeni nenuli, adică există $m \in \mathbb{Z}, m < 0$ astfel încât $a_m \neq 0$ şi $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ cu $n < m$. Numărul natural $-m$ se numeşte **ordinul polului** $z_0$. Polii de ordinul întâi se mai numesc **simpli**.

**Definiţia 6.22.** Punctul singular izolat $z_0$ se numşte **punct singular esenţial** dacă partea principală a seriei Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ are o infinitate de termeni nenuli.

**Lema 6.3.** *Fie $f\colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Dacă $|f(z)| \leq M$, pentru orice $z \in B(z_0; 0, r)$, atunci $z_0$ este punct singular aparent al lui $f$.*

*Demonstraţie.* In coroana $B(z_0;0,r)$ avem seria Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

unde

$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ \ \forall n\in\mathbb{Z}$$

şi $C=\big\{t\in\mathbb{C}|\ \ |t-z_0|=\rho\big\}(0<\rho<r)$. Putem scrie:

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{|f(t)|}{|t-z_0|^{n+1}}ds\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{M}{\rho^n}$$

Pentru $n<0$ avem $|a_n|\leq M\rho^{-n}$ şi când $\rho\longrightarrow 0$ obţinem $a_n=0,\forall n\in\mathbb{Z},n<0$, deci $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, adică $z_0$ este punct singular aparent al lui $f$. □

**Propoziţia 6.2.** *Fie $f\colon B(z_0;0,r)\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0;0,r)$. Atunci punctul $z_0$ este punct singular aparent pentru $f$ dacă şi numai dacă există şi este finită $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$.*

*Demonstraţie.* Fie $z_0$ punct singular aparent al lui $f$. Atunci în coroana $B(z_0;0,r)$ avem dezvoltarea Laurent $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ şi $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a_0\in\mathbb{C}$.

Reciproc, fie $a_0=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\in\mathbb{C}$. Pentru $\varepsilon=1\ \exists\delta>0$ astfel încât $|z-z_0|<\delta<r\ (z\neq z_0)$ rezultă $|f(z)-a_0|<1$. Atunci rezultă $|f(z)|\leq|a_0|+1,\forall z\in B(z_0;0,r)$. Conform Lemei 6.3 rezultă că $z_0$ este punct singular aparent al lui $f$. □

**Exemplul 6.27.** Punctul $z=0$ este o singularitate aparentă pentru $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, deoarece $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=1$.

**Propoziţia 6.3.** *Fie $f\colon B(z_0;0,r)\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0;0,r)$. Atunci punctul $z_0$ este pol pentru $f$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty.$$

*Demonstraţie.* Fie $z_0$ pol de ordinul $-m=k$ al lui $f$.

Deci $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^{-m}}[a_m+a_{m-1}(z-z_0)+\ldots+a_0(z-z_0)^{-m}+\ldots]=\frac{h(z)}{(z-z_0)^{-m}}$, unde $h(z)=a_m+a_{m-1}(z-z_0)+\ldots+a_0(z-z_0)^{-m}+\ldots$ este olomorfă în discul $B(z_0,r)$ şi $h(z_0)\neq 0$. Atunci $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

Reciproc, fie $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Pentru $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ astfel încât $|z - z_0| < \delta < r$ $(z \neq z_0)$ rezultă $|f(z)| > 1$. Notând $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ avem $|g(z)| < 1$ pentru orice $z \in B(z_0; 0, \delta)$. Funcţia $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ este definită în coroana $B(z_0; 0, \delta)$ $(f(z) \neq 0)$, este olomorfă în această coroană (ca inversa funcţiei olomorfe nenule $f$) şi mărginită . Aplicând Lema 6.3 rezultă că $z_0$ este punct singular aparent pentru $g$. Mai mult, $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$, deci seria Laurent pentru $g$ este $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in B(z_0, \delta)$. Putem scrie

$$g(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k}, k > 0, a_k \neq 0,$$

deoarece $z_0$ este zerou al funcţiei olomorfe $g$. Atunci

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k \varphi(z)}, \ \forall z \in B(z_0, \delta_1),$$

cu $0 < \delta_1 < \delta < r$ şi $\varphi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k} \neq 0$ în $B(z_0, \delta_1)$ (fapt ce rezultă din continuitatea funcţiei olomorfe $\varphi$ şi din $\varphi(z_0) \neq 0$). Rezultă că $\frac{1}{\varphi(z)}$ este olomorfă în discul $B(z_0, \delta_1)$ şi are o dezvoltare Taylor în acest disc:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z - z_0)^n, \ \alpha_0 \neq 0.$$

Pentru funcţia $f$ obţinem în coroana $B(z_0; 0, \delta_1)$ seria

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k}[\alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \ldots + \alpha_n(z - z_0)^n + \ldots],$$

adică o serie Laurent cu un număr finit de termeni nenuli în partea principală deci $z_0$ este pol pentru $f$. □

**Exemplul 6.28.** Punctul $z = 1$ este un pol simplu pentru $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Intr-adevăr, $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty$, iar dezvoltarea Laurent a lui $f$ în jurul lui $z = 1$ este $f(z) = \frac{1+z-1}{z-1} = \frac{1}{z-1} + 1$, cu partea principală $\frac{1}{z-1}$.

**Exemplul 6.29.** Punctul $z = 2$ este pol dublu pentru $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-2)^3}$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem $\sin \pi z = a_0 + a_1(z - 2) + a_2(z - 2)^2 + \ldots$, unde $a_0 = 0, a_1 = \pi, a_2 = 0, a_3 = -\frac{\pi^3}{6}$ etc., deci $f(z) = \frac{\pi}{(z-2)^2} - \frac{\pi^3}{6} + \ldots$

**Propoziţia 6.4.** *Fie $f\colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Atunci punctul $z_0$ este punct singular esenţial pentru $f$ dacă şi numai dacă nu există $\lim_{z\to z_0} f(z)$.*

*Demonstraţie.* Rezultă din Propoziţia 6.2 şi Propoziţia 6.3. □

**Exemplul 6.30.** Pentru funcţia $f(z) = e^z$ punctul $z = 0$ este punct singular esenţial, deoarece $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$ şi partea principală are o infinitate de termeni nenuli. Analog, $z = 0$ este singular esenţial pentru $g(z) = \sin\frac{1}{z}$ şi $h(z) = \cos\frac{1}{z}$.

**Cazul punctului de la infinit**

Fie $f\colon B(0; r, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(0; r, \infty)$ (exteriorul unui disc). Vom spune că **punctul $\infty$ este punct singular izolat al lui $f$.** Funcţia $(t \mapsto z = \frac{1}{t})\colon B(0; 0, \frac{1}{r}) \to B(0; r, \infty)$ este olomorfă ; compunând cu $f$ obţinem funcţia olomorfă $f^*\colon B(0; 0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$, $f^*(t) = f(\frac{1}{t}), \forall t \in B(0; 0, \frac{1}{r})$ care are punctul $t = 0$ ca punct singular izolat.

Vom spune că $z = \infty$ este un **punct singular aparent al lui $f$** (sau că funcţia $f$ este olomorfă în $z = \infty$) dacă funcţia $f^*$ are $t = 0$ ca punct singular aparent. Vom spune că $z = \infty$ este **pol al lui $f$** dacă funcţia $f^*$ are $t = 0$ ca pol. Vom spune că $z = \infty$ este **punctul singular esenţial al lui $f$** dacă funcţia $f^*$ are $t = 0$ ca punct singular esenţial.

**Observaţia 6.6.** Fie $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ dezvoltarea în serie Laurent a lui $f$ în coroana $|z| > r$. Atunci $f^*(t) = f(\frac{1}{t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^{-n}$ este dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f^*$ în coroana $B(0; 0, \frac{1}{r})$. Rezultă că $z = \infty$ este punct singular aparent al lui $f$ dacă $a_n = 0, \forall n \geq 1$; $z = \infty$ este pol al lui $f$ dacă $a_n = 0, \forall n \geq 1$, cu excepţia unui număr finit de valori şi $z = \infty$ este punct singular esenţial al lui $f$ dacă $a_n \neq 0$ pentru o infinitate de valori ale lui $n \geq 1$.

**Definiţia 6.23.** Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă nevidă , fie $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi fie discul punctat (coroana) $B(z_0; 0, r) \subset A(z_0 \in \mathbb{C}, r > 0)$ astfel încât punctul $z_0$ să fie punct singular izolat al funcţiei $f$.

Fie $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f$ în coroana $B(z_0; 0, r)$. Coeficientul $a_{-1}$ se numeşte **reziduul funcţiei** $f$ în punctul singular $z_0$ şi se notează $\mathrm{Rez}(f, z_0)$.

**Exemplul 6.31.** Să se calculeze reziduul funcţiei $f(z) = \frac{1}{z \sin z^2}$ în punctul $z = 0$.

*Demonstraţie.* Avem $\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \Longrightarrow z \sin z^2 =$
$= z\left(\frac{z^2}{1!} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots\right) = z^3\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots\right) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{z^3\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots\right)}$

Există o serie de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ astfel încât

$$\left(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{5!}-\ldots\right)\cdot(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots)=1,$$

deci $a_0=1, a_0\cdot 0+a_1\cdot 1=0, a_0\cdot 0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 1=0\Longrightarrow a_2=0$.

Atunci $f(z)=\frac{1}{z^3}\sum_{n\geq 0} a_n z^n=\frac{a_0}{z^3}+\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+a_3+\ldots$, deci $\mathrm{Rez}(f,0)=$
$=a_2=0$ □

**Propoziţia 6.5.** *Fie* $C=\left\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|=\rho<r\right\}$ *un cerc de rază* $\rho>0$ *parcurs în sens trigonometric direct (orientat pozitiv). Atunci*

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C f(z)dz$$

**Observaţia 6.7.** Dacă $z_0\in\mathbb{C}$ este un punct singular aparent pentru funcţia $f$, atunci $\mathrm{Rez}(f,z_0)=a_1=0$.

**Propoziţia 6.6.** *Fie* $f\colon B(z_0;0,r)\to\mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă pe coroana* $B(z_0;0,r)$ *şi fie* $z_0\in\mathbb{C}$ *un pol de ordinul* $k>0$ *pentru* $f$*. Atunci*

$$Rez(f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}$$

*Demonstraţie.* In coroana $B(z_0;0,r)$ avem dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

cu $a_{-k}\neq 0$. Atunci funcţia

$$(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{k-1}+a_0(z-z_0)^k+\ldots$$

este o funcţie olomorfă în tot discul $B(z_0;0,r)$, deoarece $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}\in\mathbb{C}$. Derivând de $k-1$ ori funcţia obţinută rezultă

$$\left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}=(k-1)!a_{-1}+k(k-1)\ldots 2a_0(z-z_0)+\ldots$$

şi atunci obţinem

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}=(k-1)!a_{-1}$$

□

**Exemplul 6.32.** Să se calculeze reziduul funcţiei $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^n}$ relativ la polii ei.

*Demonstraţie.* $z = \pm \mathrm{i}$ sunt poli de ordin $n$

$$\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to \mathrm{i}}[(z-\mathrm{i})^n \cdot \frac{1}{(z-\mathrm{i})^n(z+\mathrm{i})^n}]^{(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to \mathrm{i}}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^n}\right]^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!}(2\mathrm{i})^{-2n+1} =$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2^{2n-1}} \cdot \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!}.$$

Analog calculăm $\mathrm{Rez}(f, -\mathrm{i})$. □

**Corolarul 6.7.** *Fie $f\colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$ astfel încât $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \forall z \in B(z_0; 0, r)$, cu $P, Q$ funcţii olomorfe în discul $B(z_0; r), P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$. Atunci punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este un pol de ordinul întâi pentru $f$ şi $Rez(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.*

*Demonstraţie.* Punctul $z_0$ este zerou de ordinul întâi pentru funcţia $\frac{P(z)}{Q(z)}$, deci pol de ordinul întâi pentru $f$. Aplicând Propoziţia 6.6 pentru $k = 1$ obţinem

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

□

**Definiţia 6.24.** Fie $f\colon B(0; r, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în exteriorul discului $B(0, r)$ (deci $z = \infty$ este punct singular izolat pentru funcţia $f$). Se numeşte **reziduul funcţiei $f$ în punctul $\infty$**, reziduul funcţiei $(-\frac{1}{t^2})f(\frac{1}{t})$ în punctul $t = 0$.

**Propoziţia 6.7.** *Fie $C = \left\{z \in \mathbb{C}/|z| = \rho > r\right\}$ un cerc de rază $\rho$ parcurs în sens trigonometric direct (orientat pozitiv). Atunci*

$$Rez(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)dz.$$

**Teorema 6.12.** ***(teorema reziduurilor)*** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f\colon D \setminus \left\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\right\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pentru care $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sunt puncte singulare izolate. Fie $K \subset D$ un compact cu frontiera $\Gamma = FrK$ curbă de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, jordaniană , orientată pozitiv astfel încât $\alpha_j \in IntK, j = \overline{1, k}$. Atunci*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} Rez(f, \alpha_j)$$

*Demonstraţie.* Fie $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ frontierele orientate pozitiv ale unor discuri centrate în $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ disjuncte două câte două şi conţinute în $\mathrm{Int}K$. Rezultă

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k}\int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Atunci, din Propoziţia 6.5, obţinem

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Rez}(f,\alpha_j).$$

□

**Corolarul 6.8.** *Fie $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{C}$ punctele singulare izolate ale unei funcţii $f\colon \mathbb{C}\backslash\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\} \to \mathbb{C}$, olomorfe pe $\mathbb{C}\backslash\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$. Atunci $\sum_{j=1}^{k} Rez(f,\alpha_j) + Rez(f,\infty) = 0$ (suma tuturor reziduurilor este nulă în cazul unui număr finit de puncte singulare izolate).*

*Demonstraţie.* Alegem $r > 0$ astfel încât $\alpha_j \in B(0,r), j = \overline{1,k}$. Rezultă că funcţia este olomorfă în exteriorul discului $B(0,r)$, deci punctul $z = \infty$ este punct singular izolat pentru $f$. Fie $\Gamma = \mathrm{Fr}B(0,r')(r' > r)$ frontiera orientată pozitiv a discului $B(0,r')$ şi aplicând Teorema 6.12,

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Rez}(f,\alpha_j).$$

Din Propoziţia 6.7 rezultă că $\int_\Gamma f(z)dz = -2\pi \mathrm{i}\mathrm{Rez}(f,\infty)$, deci

$$\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Rez}(f,\alpha_j) + \mathrm{Rez}(f,\infty) = 0.$$

□

**Exemplul 6.33.** Să se rezolve integrala

$$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)}dz, r > 0, r \neq 1, r \neq 2.$$

*Demonstraţie.* 1) Dacă $0 < r < 1$, aplicăm teorema lui Cauchy şi obţinem $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)}dz = 0$.

2) Dacă $1 < r < 2$, aplicăm formula integrală a lui Cauchy şi obţinem

$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)}dz = \int_{|z|=r} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z-2}}{z-\mathrm{i}}dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}dz$, unde $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z-2}$.

Atunci $\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}dz = 2\pi \mathrm{i} f(\mathrm{i}) = 2\pi \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-2}$.

3) Dacă $r > 2$, aplicăm teorema reziduurilor.

i şi 2 sunt poli simpli

Calculăm $\mathrm{Rez}(f,\mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-2}$

$\mathrm{Rez}(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} = \frac{\mathrm{e}^2}{2-\mathrm{i}}$

Atunci $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)}dz = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-2} + \frac{\mathrm{e}^2}{2-\mathrm{i}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-\mathrm{e}^2}{\mathrm{i}-2}$. □

## 6.5 Calculul unor integrale reale folosind teorema reziduurilor

**Tipul I**: $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt$, unde $R(x, y)$ este o funcţie raţională al cărei numitor nu se anulează pe cercul unitate.

Aceste integrale se calculează făcând schimbarea $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$. Atunci $z$ va parcurge cercul unitate, adică $|z| = 1$. Avem $dz = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt = \mathrm{i}zdt$, deci $dt = \frac{dz}{\mathrm{i}z}$. Cum $\sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2\mathrm{i}}, \cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$, integrala devine $I = \int_{|z|=1} \frac{1}{\mathrm{i}z} R(\frac{z - \frac{1}{z}}{2\mathrm{i}}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2})dz$.

**Exemplul 6.34.** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}dt$.

*Demonstraţie.* Deoarece $\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$ vom face schimbarea de variabilă $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$, deci $dz = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$ şi $|z| = 1$.

Integrala devine

$$\int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{\mathrm{i}z}dz}{\left(2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = \frac{4}{\mathrm{i}} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}dz.$$

Funcţia $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}, z \in \mathbb{C} \setminus \{-2 \pm \sqrt{3}\}$ e olomorfă şi are polii dubli $-2 \pm \sqrt{3}$.

Aplicăm teorema reziduurilor, ţinând cont de faptul că doar $-2 + \sqrt{3}$ se află în interiorul cercului de centru 0 şi rază 1 şi rezultă că

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}dz = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Rez}(f, -2 + \sqrt{3}).$$

Calculăm $\mathrm{Rez}(f, -2 + \sqrt{3}) = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} [(z + 2 - \sqrt{3})^2 f(z)]' = \frac{1}{6\sqrt{3}} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz = \frac{\pi\mathrm{i}}{3\sqrt{3}} \Longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ □

**Tipul II**: $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, unde $R(x)$ este o funcţie fără poli reali cu proprietatea că $\lim_{|x| \to \infty} xR(x) = 0$ (condiţie suficientă ca integrala să fie convergentă ).

Considerăm extinderea $R(z)$, $z \in \mathbb{C}$ şi o integrăm pe un semicerc $\gamma_r = [-r, r] \cup \delta(r)$ de rază $r$ cu centrul în $O$. Obţinem $\int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Rez}(R, \alpha_k)$, unde $\alpha_k$ sunt polii din semidisc. Deci

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\delta(r)} R(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Rez}(R, \alpha_k).$$

Cum $\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} R(x)dx = I$, vom arăta că $\int_{\delta(r)} R(z)dz \longrightarrow 0$ când $r \longrightarrow \infty$ şi vom obţine că $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Rez}(R, \alpha_k)$, unde suma se ia după toţi

polii lui $R(z)$ din semiplanul $y > 0$ (funcţia raţională $R(z)$ are un număr finit de poli, deci pentru $r$ suficient de mare toţi polii din semiplanul $y > 0$ se află în semidiscul de rază $r$). Pentru a arăta că $\int_{\delta(r)} R(z)dz \longrightarrow 0$ când $r \longrightarrow \infty$, vom folosi lema următoare :

**Lema 6.4.** *(**Jordan**) Fie $f$ o funcţie continuă definită în sectorul $\theta_1 \leq \theta \leq \leq \theta_2$ ($z = re^{it}$). Dacă $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ ($\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$), atunci*

$$\int_{\delta(r)} f(z)dz \longrightarrow 0 \ \ \textit{când} \ \ r \longrightarrow \infty,$$

*unde $\delta(r)$ este arcul de cerc centrat în origine de rază $r$ conţinut în sectorul $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.*

*Demonstraţie.* Fie $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Atunci avem

$$\left|\int_{\delta(r)} f(z)dz\right| \leq M(r)\int_{\delta(r)} ds = M(r)r(\theta_2 - \theta_1),$$

şi cum $\lim\limits_{r\to\infty} rM(r) = 0$, rezultă că $\int_{\delta(r)} f(z)dz \longrightarrow 0$, când $r \longrightarrow \infty$. □

**Exemplul 6.35.** Să se calculeze integrala $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$.

*Demonstraţie.* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \dfrac{x^2}{(1+x^2)^3} = 1$ pentru $\alpha = 4 > 1$, deci integrala $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$ este convergentă .

Funcţia $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$ este pară , deci $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$.

Fie $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}$,$z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$ olomorfă .

$\pm$i sunt poli de ordinul 3 pentru $f$

Fie $r > 1$ şi $\gamma_r = [-r, r] \cup \delta_r$, unde $\delta_r = re^{it}, t \in [0, \pi]$.

Aplicăm teorema reziduurilor şi obţinem $\int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i})$

$\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})^3\left(\dfrac{z^2}{(1+z^2)^3}\right)\right]'' = -\dfrac{\mathrm{i}}{16}$

Deci $\int_{\gamma_r} f(z)dz = \frac{\pi}{8}$.

Dar $\frac{\pi}{8} = \int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{-r}^r \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx + \int_{\delta_r} f(z)dz$. In această relaţie trecem la limită când $r \longrightarrow \infty$ şi obţinem $\frac{\pi}{8} = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$, deoarece $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\delta_r} f(z)dz = 0$ conform Lemei 6.4 ( $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{z\to\infty} z \cdot \dfrac{z^2}{(1+z^2)^3} = 0$). Aşadar, $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{\pi}{16}$. □

**Lema 6.5.** *(**Jordan**) Fie $f$ o funcţie continuă definită în sectorul $\theta_1 \leq \theta \leq \leq \theta_2$ ($z = re^{it}$). Dacă $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$ ($\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$), atunci*

$$\int_{\delta(r)} f(z)dz \longrightarrow 0 \ \ când \ \ r \longrightarrow 0,$$

*unde $\delta(r)$ este arcul de cerc centrat în origine de rază $r$ conţinut în sectorul $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.*

**Tipul III**: $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$, unde $f(z)$ este olomorfă în semiplanul $y > 0$ cu excepţia, eventual, a unei mulţimi finite de puncte.

**Cazul 1)**. Presupunem că punctele singulare nu sunt pe axa reală . Atunci integrala $\int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx$ are sens (sunt două integrale reale $\int_{-r}^{r} f(x)\cos xdx$ şi $\int_{-r}^{r} f(x)\sin xdx$) şi când $r \longrightarrow \infty$, tinde la $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$, dacă acestă integrală converge.

**Lema 6.6.** *Dacă $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ pentru $y \geq 0$, atunci*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_k Rez(f(z)e^{iz}, \alpha_k),$$

*unde suma se ia după toate punctele singulare ale lui $f(z)$ situate în semiplanul $y > 0$.*

*Demonstraţie.* Pentru $y \geq 0$ avem $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ şi vom aplica aceeaşi ca la integralele de tip II. Cu aceleaşi notaţii vom arăta că $\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}dz \longrightarrow 0$ când $r \longrightarrow \infty$ şi rezultă lema. □

**Lema 6.7.** *Fie $f$ o funcţie continuă definită în sectorul $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ din semiplanul $y \geq 0$. Dacă $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, atunci*

$$\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}dz \longrightarrow 0 \ \ când \ \ r \longrightarrow \infty,$$

*unde $\delta(r)$ este arcul de cerc centrat în origine de rază $r$ conţinut în sectorul $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.*

*Demonstraţie.* Fie $z = e^{i\theta}, M(r) = \sup_{\theta_1\leq\theta\leq\theta_2} |f(re^{i\theta})|$.

Avem $\left|\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}dz\right| \leq M(r)\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}rd\theta$.

Dar $\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}rd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta}rd\theta$ şi, deoarece, dacă $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, atunci $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$, rezultă că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta}rd\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}rd\theta \leq \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}rd\theta = \frac{\pi}{2},$$

deci $\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin\theta} r d\theta \leq \pi$.

Obţinem $\left|\int_{\delta(r)} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}dz\right| \leq M(r)\pi$ şi pentru $r \longrightarrow \infty$, $M(r) \longrightarrow 0$ prin ipoteză . □

**Exemplul 6.36.** Să se calculeze $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^4+4)}dx$.

*Demonstraţie.* Considerăm integrala $I = \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$, unde $\gamma_r = [-r, r] \cup \delta_r, r > 2$

Funcţia $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ este olomorfă cu polii simpli $\pm\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}$.

Cum polii i şi 2i sunt în interiorul conturului $\gamma_r$, aplicăm teorema reziduurilor şi avem $I = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i}) + \mathrm{Rez}(f, 2\mathrm{i}))$.

Calculăm $\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+4)(z+\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{6\mathrm{i}} = \frac{1}{6\mathrm{ie}}$.

$\mathrm{Rez}(f, 2\mathrm{i}) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z+2\mathrm{i})} = -\frac{1}{12\mathrm{ie}^2}$

Deci $I = \frac{(2\mathrm{e}-1)\pi}{6\mathrm{e}^2}$.

Pe de altă parte $I = \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx + \int_{\delta_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$. In această relaţie trecem la limită când $r \longrightarrow \infty$ şi obţinem $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx =$

$= \frac{(2\mathrm{e}-1)\pi}{6\mathrm{e}^2}$, deoarece, conform lemei lui Jordan, $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz =$

$= 0$ $(|zf(z)| = \left|\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| < \frac{\mathrm{e}^{-y}}{|z|^3}(y > 0) \Longrightarrow \lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0)$

Dar $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^4+4)}dx =$

$= \frac{(2\mathrm{e}-1)\pi}{12\mathrm{e}^2}$. □

**Cazul 2)**. Considerăm cazul în care $f(z)$ are şi puncte singulare pe axa reală şi ne limităm la cazul când $f(z)$ are un pol simplu în 0. Alegem drumul $\gamma_{r,\varepsilon} = [-r, -\varepsilon] \cup \gamma_\varepsilon \cup [\varepsilon, r] \cup \gamma_r^-$, unde $\gamma_\varepsilon$ şi $\gamma_r$ sunt semicercuri în semiplanul superior cu $\varepsilon < r$.

**Lema 6.8.** ***(a semireziduurilor)*** *Dacă în $z = 0$ funcţia $g(z)$ are un pol simplu, atunci*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = \pi\mathrm{i}Rez(g, 0)$$

*($\gamma_\varepsilon$ parcurs în sens trigonometric direct).*

*Demonstraţie.* In vecinătatea lui 0 avem $g(z) = \frac{a}{z} + h(z)$, cu $h(z)$ olomorfă

Atunci $\int_{\gamma_\varepsilon} h(z)dz \longrightarrow 0$, când $\varepsilon \longrightarrow 0$ şi $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{a}{z}dz = \pi\mathrm{i}a$ (cu calculul $z = \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$). □

Folosind acestă lemă pentru funcţia $g(z) = f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ şi metoda anterioară din cazul 1) putem calcula integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}dx$.

**Exemplul 6.37.** Să se calculeze $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

*Demonstraţie.*

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}dx\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}dx.$$

Dar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}dx = \lim_{r\to\infty,\varepsilon\to 0}\left[\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}dx\right] =$$

$$= \lim_{r\to\infty,\varepsilon\to 0}\left[\int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}dz - \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right]$$

şi

$$\int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}dz = 2\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Rez}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}, \alpha_k\right) = 0,$$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}dz \longrightarrow -\pi\mathrm{i}\mathrm{Rez}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}, 0\right) = -\pi\mathrm{i}, \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}dz \longrightarrow 0,$$

deci $I = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\pi\mathrm{i} = \frac{\pi}{2}$. □

**Observaţia 6.8.** a) Pentru integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}dx$ se alege drumul din semiplanul inferior $y \leq 0$.

b) Pentru integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{ax}dx$, unde $a \in \mathbb{C}$ se alege semiplanul în care $|\mathrm{e}^{ax}| \leq 1$.

# Capitolul 7

# Serii Fourier. Integrala Fourier

## 7.1 Serii Fourier

In ştiinţă şi în tehnică întâlnim deseori fenomene periodice, adică fenomene care se reproduc la un anumit interval de timp $T$, numit perioadă . Diferitele mărimi în legătură cu fenomenul periodic considerat, după scurgerea perioadei $T$ revin la valorile lor anterioare şi reprezintă funcţii periodice de timpul $t$, caracterizate prin $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ (de exemplu, intensitatea şi tensiunea curentului alternativ). Cea mai simplă funcţie periodică este **funcţia sinusoidală** $A\sin(\omega t + \alpha)$, unde $\omega$ este frecvenţa, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dacă se adună mai multe mărimi sinusoidale de forma

$$y_0 = A_0, y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2), \dots \tag{7.1}$$

se obţine o funcţie periodică (cu perioada $T$) diferită de mărimile de tipul (7.1). Acum se pune problema dacă o funcţie periodică $\varphi(t)$ dată de perioadă $T$ se poate reprezenta sub formă de sumă a unei mulţimi finite sau infinite de mărimi sinusoidale (7.1). Vom vedea că se poate da un raspuns afirmativ dar dacă se ia în considerare tot şirul infinit de mărimi (7.1). Deci este posibilă următoarea dezvoltare în serie trigonometrică

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \tag{7.2}$$

unde $A_0, A_1, A_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sunt constante având valori speciale pentru fiecare funcţie de acest fel, iar frecvenţa $\omega$ este dată de $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Geometric acesta înseamnă că diagrama unei funcţii periodice se obţine prin suprapunerea unei serii de sinusoide.

In studiul acusticii, întâlnim noţiunea de armonice. O coardă fixată la ambele capete poate vibra cu un număr de frecvenţe diferite. Cea mai joasă

dintre ele, $\omega$, se numeşte **frecvenţa fundamentală** . Celelalte vor avea valorile $2\omega, 3\omega \ldots$ şi se numesc **armonice**. Aceste armonice pot fi excitate simultan, iar vibraţia rezultată are o formă de undă complexă . Aceasta va fi şi ea periodică cu o perioadă $T = \frac{1}{\omega}$. Observăm că prin compunerea unui număr de frecvenţe în relaţie armonică se obţine o formă de undă periodică complexă . Reciproc, o formă de undă periodică complexă poate fi descompusă într-un număr de componente sinusoidale, care sunt în relaţie armonică . In acest capitol ne vom ocupa de cel de-al doilea proces. Graficul amplitudinii în raport cu frecvenţa, care în cazul de faţă este format dintr-un număr de linii discrete corespunzătoare frecvenţelor $\omega, 2\omega, \ldots$ se numeşte **spectrul formei de undă** .

Dacă se alege ca variabilă independentă $x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$ se obţine funcţia $f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right)$, periodică de perioadă $2\pi$. Dezvoltarea (7.2) devine :

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \tag{7.3}$$

Dacă desfăşurăm termenii seriei (7.3) după formula sinusului de sumă şi punând

$$A_0 = a_0, A_n \sin \alpha_n = a_n, A_n \cos \alpha_n = b_n, \ \ \forall n \geq 1$$

obţinem dezvoltarea trigonometrică

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{7.4}$$

Vom arăta metoda determinării coeficienţilor $a_n$ şi $b_n$, aplicată în a doua jumătate a secolului XVIII de Euler şi independent de el la începutul secolului XIX de Fourier.

Presupunem că funcţia $f$ este integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi că dezvoltarea (7.4) se poate scrie. O vom integra termen cu termen de la $-\pi$ la $\pi$ şi obţinem :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx \right] = 2\pi a_0$$

Deci

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{7.5}$$

Inmulţim ambii membri ai egalităţii (7.4) cu $\cos mx$ şi integrăm de la $-\pi$ la $\pi$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mxdx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)dx +$$

$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)dx =$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2}dx = a_m \cdot \pi,$$

deoarece

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = \begin{cases} 0, & \text{pentru } n \neq m \\ \pi, & \text{pentru } n = m \end{cases}$$

Deci

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mxdx, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{7.6}$$

In mod similar înmulţind (7.4) cu $\sin mx$ şi integrând de la $-\pi$ la $\pi$ obţinem

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mxdx, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{7.7}$$

Formulele (7.5), (7.6), (7.7) se numesc **formulele lui Euler-Fourier**; coeficienţii calculaţi cu ajutorul acestora se numesc **coeficienţii Fourier** ai funcţiei respective, iar seria trigonometrică (7.4) formată cu ajutorul lor se numeşte **seria Fourier**.

Am folosit anterior integrarea termen cu termen, dar condiţia suficientă a aplicării ei este convergenţa uniformă a seriei (7.4). Până nu vom demonstra riguros acest lucru vom considera numai formal seria Fourier a funcţiei $f$ date şi notăm

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{7.8}$$

Tinând cont de formulele (7.5) şi (7.8) putem scrie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{7.9}$$

şi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Observăm că pentru funcţia $F(u)$ cu perioada $2\pi$, valoarea integralei $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)du$ într-un interval cu lungimea $2\pi$ nu depinde de $\alpha$. De aceea, şi în formulele

(7.6) şi (7.7) integralele pot fi luate pe orice interval de lungime $2\pi$; de exemplu, putem scrie :

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx, \;\; m = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.10}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \;\; m = 1, 2, \ldots \tag{7.11}$$

Pentru a studia comportarea seriei (7.9) într-un anumit punct $x = x_0$, scriem următoarea expresie a sumei parţiale

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0)$$

Inlocuim $a_m$ şi $b_m$ cu expresiile lor din (7.6) şi (7.7) (în variabilă $u$) şi obţinem:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0]du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(u - x_0)\right]du$$

Stim că

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(u - x_0) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}},$$

deci

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}du.$$

Această integrală se numeşte integrala lui Dirichlet.

Cum funcţiile de variabilă $u$ care apar aici sunt de perioadă $2\pi$, intervalul de integrare $[-\pi, \pi]$ se poate înlocui, conform observaţiei anterioare cu intervalul $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2\sin\frac{u-x_0}{2}}du.$$

Prin substituţia $t = u - x_0$ integrala devine

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Descompunând integrala în două integrale una de la 0 la $\pi$ şi alta de la $-\pi$ la 0 şi reducând şi a doua integrală , prin schimbarea semnului variabilei, tot la intervalul $[0, \pi]$, obţinem

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \tag{7.12}$$

Aşadar, problema se reduce la studiul comportării acestei integrale care conţine parametrul $n$.

**Lema 7.1.** *(**Riemann**) Dacă $g$ este o funcţie absolut integrabilă într-un interval oarecare finit $[a,b]$, atunci*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin ptdt = 0$$

*şi*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos ptdt = 0.$$

*Demonstraţie.* Oricare ar fi intervalul $[\alpha,\beta]$ avem

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin ptdt\right| = \left|\frac{\cos p\alpha - \cos p\beta}{p}\right| \le \frac{2}{p}.$$

Presupunem că funcţia $g$ este integrabilă în sens propriu. Descompunem intervalul $[a,b]$ în $n$ părţi prin punctele

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

şi astfel descompunem integrala

$$\int_a^b g(t)\sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin ptdt.$$

Notând $m_i = \inf\limits_{t\in[t_i,t_{i+1}]} g(t)$ scriem

$$\int_a^b g(t)\sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t)-m_i]\sin ptdt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin ptdt.$$

Dacă $\omega_i$ este oscilaţia funcţiei $g$ în intervalul $[t_i,t_{i+1}]$, atunci în acest interval $g(t)-m_i \le \omega_i$. Atunci

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ptdt\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i + \frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar alegem diviziunea intervalului $[a,b]$ astfel încât să avem $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2}$. Acest lucru este posibil deoarece funcţia $g$ este integrabilă .

Cum numerele $m_i$ sunt definite, putem lua $p > \frac{4}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|m_i|$, iar pentru aceste valori ale lui $p$ vom obţine

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ptdt\right| < \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ .

Dacă funcţia $g$ este absolut integrabilă este suficient să ne mărginim la ipoteza că în intervalul $[a,b]$ există un singur punct singular, de exemplu $b$. Altfel, s-ar putea descompune intervalul într-un număr finit de termeni de părţi cuprinzând numai câte un punct singular şi aplicăm raţionamentul la fiecare separat. Fie $0<\eta<b-a$. Descompunând integrala în două $\int_a^b=\int_a^{b-\eta}+\int_{b-\eta}^b$, avem

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} g(t)\sin ptdt\right|\leq\int_{b-\eta}^{b}|g(t)|dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

dacă se alege $\eta$ destul de mic. Integrala $\int_a^{b-\eta} g(t)\sin ptdt$ tinde către 0 dacă $p\longrightarrow\infty$, conform celor demonstrate anterior, deoarece pe intervalul $[a,b-\eta]$ funcţia $g$ este integrabilă (în sensul propriu), deci $\left|\int_a^{b-\eta} g(t)\sin ptdt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Atunci rezultă ceea ce trebuia demonstrat. □

**Corolarul 7.1.** *Coeficienţii Fourier $a_m, b_m$ ai unei funcţii absolut integrabile tind către 0 când $m\longrightarrow\infty$.*

**Teorema 7.1.** ***(Riemann)*** *Natura seriei Fourier a unei funcţii $f$ într-un punct oarecare $x_0$ depinde exclusiv de valorile luate de funcţie într-o vecinătate a acestuia.*

**Observaţia 7.1.** Dacă se iau două funcţii ale căror valori într-o vecinătate a punctului $x_0$ coincid, atunci, oricât ar fi ele de diferite în afara acestei vecinătăţi, seriile Fourier corespunzătoare acestor funcţii se comportă în mod identic în punctul $x_0$, ele sunt fie ambele convergente şi anume către aceeaşi sumă , fie ambele divergente.

*Demonstraţie.* Fie $0<\delta<\pi$ arbitrar. Descompunem integrala din (7.12) în sumă

$$\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+$$

$$+\int_{\delta}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

Dacă transcriem cea de-a doua integrală din membrul al doilea sub forma

$$\int_{\delta}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt$$

rezultă că $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ este o funcţie absolut integrabilă de variabilă $t$ în intervalul $[\delta,\pi]$. Conform Lemei 7.1, această integrală tinde către 0 când

$n \longrightarrow \infty$, deci existenţa limitei sumei parţiale a seriei Fourier, $s_n(x_0)$ este determinată de comportarea integralei

$$\rho_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (7.13)$$

Această integrală conţine numai valorile funcţiei $f$ care corespund variaţiei argumentului în intervalul $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. □

Revenim la studiul comportării sumei parţiale $s_n(x_0)$ a seriei Fourier pentru care am obţinut expresia integrală (7.12). Dacă se ia $f(x) = 1$, atunci $s_n(x_0) = 1$, iar din (7.12) rezultă

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Inmulţim ambii membri ai egalităţii cu $S_0$, suma presupusă a seriei şi scăzând rezultatul din (7.12) rezultă

$$s_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (7.14)$$

Dacă vrem să stabilim că $S_0$ este suma seriei trebuie să arătăm că integrala (7.14) tinde la 0 când $n \longrightarrow \infty$.

**Criteriul 7.1.** ***(Criteriul lui Dini)*** *Seria Fourier a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ converge către suma $S_0$ dacă pentru un $h > 0$ oarecare, integrala*

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0|}{t}dt$$

*există .*

*Demonstraţie.* In această ipoteză există şi integrala $\int_0^{\pi}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0|}{t}dt$. Dacă se poate transcrie expresia (7.14) sub forma

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0|}{t}\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt$$

rezultă din Lema 7.1 că , dacă $n \longrightarrow \infty$, ea tinde la 0, deoarece funcţiile $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{t}$ şi $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{t}\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ sunt absolut convergente. □

**Observaţia 7.2.** Dacă funcţia $f$ este continuă în $x_0$, atunci integrala lui Dini se scrie

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}dt,$$

iar dacă $f$ are în $x_0$ doar discontinuităţi de prima speţă , atunci integrala lui Dini se scrie

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{t}dt.$$

Evident, este suficient să se presupună existenţa separată a integralelor

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0)|}{t}dt \text{ şi } \int_0^h \frac{|f(x_0-t)+f(x_0)|}{t}dt$$

sau

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0+0)|}{t}dt \text{ şi } \int_0^h \frac{|f(x_0-t)+f(x_0-0)|}{t}dt.$$

**Criteriul 7.2.** *(**Criteriul lui Lipschitz**) Seria Fourier a funcţiei $f$ converge în punctul $x_0$, unde este continuă , către suma $f(x_0)$, dacă pentru valori $t$ suficient de mici, este satisfăcută inegalitatea*

$$|f(x_0 \pm t)+f(x_0)| \leq Lt^{\alpha},$$

*unde $L$ şi $\alpha$ sunt constante pozitive ($\alpha \leq 1$).*

**Corolarul 7.2.** *Dacă funcţia $f$ are în punctul $x_0$ o discontinuitate de prima speţă şi există şi sunt finite limitele*

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0+0)}{t}, \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)+f(x_0-0)}{-t},$$

*atunci seria Fourier a lui $f$ este convergentă şi suma sa este $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

**Lema 7.2.** *Dacă funcţia $g$ este monoton crescătoare, rămânând mărginită în intervalul $[0,h]$, atunci*

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}dt = \frac{\pi}{2}g(+0).$$

*Demonstraţie.* Scriem intgrala ca sumă de două integrale

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}dt = g(+0)\int_0^h \frac{\sin pt}{t}dt + \int_0^h [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt.$$

Facem substituţia $pt = z$ şi obţinem

$$g(+0)\int_0^h \frac{\sin pt}{t}dt = g(+0)\int_0^{ph}\frac{\sin z}{z}dz.$$

Dacă $p \longrightarrow \infty$, atunci integrala tinde către $\frac{\pi}{2}g(+0)$, deoarece

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi}{2}.$$

Aşadar, problema se reduce la a demonstra că integrala $\int_0^h [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt$ tinde către 0.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ arbitrar, există $\delta > 0$ (se poate considera $\delta < h$) astfel încât $0 \leq g(t) - g(+0) < \varepsilon$ pentru $0 < t \leq \delta$. Descompunem integrala

$$\int_0^h [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt = \int_0^\delta [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt + \int_\delta^h [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt.$$

Avem

$$\int_0^\delta [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt = [g(\delta)-g(+0)]\int_\eta^\delta \frac{\sin pt}{t}dt = [g(\delta)-g(+0)]\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin z}{z}dz$$

(conform formulelor lui Bonnet- a doua teoremă de medie). Primul termen este mai mic decât $\varepsilon$, iar cel de-al doilea este uniform mărginit pentru toate valorile lui $p$. Intr-adevăr, din convergenţa integralei improprii $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz$ rezultă că funcţia continuă de variabilă $z$ $\int_0^z \frac{\sin z}{z}dz$, având o limită finită când $z \longrightarrow \infty$, va fi mărginită pentru toate valorile lui $z$

$$\left|\int_0^z \frac{\sin z}{z}dz\right| \leq L,$$

deci

$$\left|\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin z}{z}dz\right| = \left|\int_0^{p\delta}\frac{\sin z}{z}dz - \int_0^{p\eta}\frac{\sin z}{z}dz\right| \leq 2L.$$

Aşadar,

$$\left|\int_\eta^\delta \frac{\sin pt}{t}dt\right| < 2L\varepsilon.$$

Integrala $\int_\delta^h [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}dt$ tinde către 0 când $p \longrightarrow \infty$ conform Lemei 7.1, deoarece factorul cu care este înmulţit $\sin pt$ este o funcţie integrabilă ($t \geq \delta$). □

**Criteriul 7.3.** *(**Criteriul lui Dirichlet-Jordan**) Seria Fourier a funcţiei $f$ converge către suma $S_0$ în punctul $x_0$ dacă în orice interval $[x_0-h, x_0+h]$ funcţia are valori mărginite.*

*Demonstraţie.* Am văzut că suma parţială $s_n(x_0)$ când $n \longrightarrow \infty$ este determinată de comportarea integralei $\rho_n(x_0)$ (vezi (7.13)) unde $\delta$ se poate lua în particular $h$. Atunci

$$\rho_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt.$$

Suma $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ este prin ipoteză o funcţie mărginită , iar $\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ este o funcţie crescătoare. Aşadar şi produsul $[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$

este o funcţie cu variaţie mărginită şi prin urmare, se prezintă sub formă de diferenţă de două funcţii monoton crescătoare. Cum Lema 7.2 este aplicabilă la fiecare dintre ele, ea este aplicabilă şi diferenţei lor şi obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(h)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

□

**Criteriul 7.4.** *(**Criteriul lui Dirichlet**) Dacă funcţia $f$ cu perioada $2\pi$ este monotonă pe porţiuni în intervalul $[-\pi,\pi]$ (adică intervalul se poate descompune într-un număr finit de intervale parţiale în interiorul cărora funcţia este monotonă în fiecare în parte) şi are în el cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate, seria ei Fourier converge către suma $f(x_0)$ în fiecare punct de continuitate şi către suma $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ în fiecare punct de discontinuitate.*

**Cazul unui interval arbitrar**

In cazul în care funcţia $f$ are perioada $T=2\ell$, $(\ell>0)$, atunci toate rezultatele de mai sus sunt în continuare adevărate, cu adaptările corespunzătoare. Coeficienţii Fourier sunt:

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,\ \forall\, n=0,1,2,...,$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ \forall\, n=1,2,...$$

seria Fourier fiind :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

**Dezvoltarea în serie de cosinusuri şi de sinusuri**

Dacă funcţia $f$ dată în intervalul $[-\pi,\pi]$ integrabilă este impară , tot impară va fi şi funcţia $f(x)\cos nx$, deci $a_n=0,\ \ \forall n\geq 0$ şi

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ \ \forall n\geq 1.$$

Aşadar, seria Fourier a unei funcţii impare conţine numai sinusuri

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

Dacă funcţia $f$ dată în intervalul $[-\pi,\pi]$ absolut integrabilă este pară , atunci $f(x)\sin nx$ este impară , deci $b_n=0,\ \ \forall n\geq 1$ şi

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ \ \forall n\geq 0.$$

Aşadar, seria Fourier a unei funcţii pare conţine numai cosinusuri

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

**Observaţia 7.3.** O funcţie este dată în intervalul $[0, \pi]$ poate fi dezvoltată în serie de cosinusuri şi în serie de sinusuri astfel :

Vom defini funcţia în intervalul $[-\pi, 0]$ punând $f(x) = f(-x)$ şi obţinem o funcţie pară în intervalul $[-\pi, \pi]$, deci dezvoltarea ei va fi în serie de cosinusuri, sau punând $f(x) = -f(-x)$, ea devenind impară , deci dezvoltarea este în serie de sinusuri.

Fie $f : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă şi fie $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, periodică de perioadă $2\ell$, definită prin:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, \ell] \\ f(-x) & , \quad x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Dacă funcţia $\tilde{f}$ satisface condiţiile criteriului lui Dirichlet, atunci, dezvoltând $\tilde{f}$ în serie Fourier, rezultă :

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell}, \ \forall\, x \in (0, \ell),$$

$$f(0+0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ f(\ell - 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

coeficienţii $a_n$ fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.
Formula de mai sus se numeşte dezvoltarea în serie de cosinusuri a lui $f$.
Analog, dacă funcţia (impară ):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & , \quad x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

satisface condiţiile criteriului lui Dirichlet, atunci dezvoltarea în serie de sinusuri a funcţiei $f$ este:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \ \forall\, x \in (0, \ell),$$

coeficienţii $b_n$ fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.

**Teorema 7.2.** ***(Identitatea lui Parseval)***

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(t)^2 \, dt.$$

**Puterea undelor nesinusiodale**

Considerăm termenul $a_n \cos nt$. Puterea medie activă corespunzătoare acestei oscilaţii este $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nt)^2 dt$. De exemplu, dacă $a_n$ reprezintă o tensiune, această expresie dă puterea activă care ar fi dezvoltată într-o rezistenţă de valoare egală cu unitatea.

Insă $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nt)^2 dt = \frac{1}{2}a_n^2$.

Similar, puterea pentru componenta $b_n \sin nt$ este dată de $\frac{1}{2}b_n^2$. Puterea unui semnal nesinusoidal $f(t)$ este dată de $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2 dt$, care, conform identităţii lui Parseval, este egală cu $\frac{1}{4}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$.

In consecinţă , puterea unei unde nesinusoidale este egală cu suma puterilor, componentele lor Fourier.

**Teorema 7.3.** ***(Convergenţa uniformă a seriei Fourier)*** *Dacă $f : R \mapsto \mathbb{C}$ este o funcţie continuă , de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni şi periodică de perioadă $2\pi$, atunci seria sa Fourier este absolut şi uniform convergentă iar suma este $f$.*

**Exemplul 7.1.** Să se demonstreze formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n},\ \forall x \in (0, 2\pi).$$

*Demonstraţie.* Fie $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$, prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$; calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{(\pi - x)\sin nx}{2n\pi}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = 0, \forall\, n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{-(\pi - x)\cos nx}{2n\pi}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2n\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}, \forall\, n \geq 1.$$

Aplicând criteriul lui Dirichlet, rezultă :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n},\ \forall x \in (0, 2\pi).$$

In punctele $x = 0$ şi $x = 2\pi$ funcţia $f$ nu este continuă ; în aceste puncte seria trigonometrică asociată ei are suma 0. □

**Exemplul 7.2.** Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin 2nx}{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ \forall\, x\in(0,\pi).$$

*Demonstraţie.* Din formula:

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n},\ \forall x\in(0,2\pi),$$

demonstrată în exemplul 7.1, înlocuind pe $x$ cu $2x$, rezultă identitatea:

$$\frac{\pi-2x}{2}=\sum_{n\geq 1}\frac{\sin 2nx}{n},\ \forall\, x\in(0,\pi).$$

Impărţind acum cu 2, rezultă egalitatea cerută . □

**Exemplul 7.3.** Să se demonstreze identităţile:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4},\ \forall x\in(0,\pi)$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4},\ \forall x\in(-\pi,0).$$

Să se calculeze apoi suma seriei:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-...$$

*Demonstraţie.* Pentru prima identitate se scad membru cu membru cele două egalităţi demonstrate în exemplele precedente; a doua identitate rezultă din prima şi din imparitatea funcţiei sinus. Pentru a calcula suma seriei numerice date, se ia $x=\frac{\pi}{3}$ în prima egalitate şi obţinem:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{3}}{2n-1},$$

de unde rezultă : $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-...=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. □

**Fenomenul Gibbs**

In jurul unui punct de discontinuitate al unei funcţii date, seria Fourier asociată ei converge doar punctual (nu neapărat uniform). Acest fapt conduce la un defect de convergenţă (aparent paradox) al şirului sumelor parţiale

asociat seriei trigonometrice date, numit fenomenul Gibbs. Dăm în continuare un exemplu în acest sens.
Considerăm restricţia funcţiei signum la intervalul $(-\pi, \pi)$,

$$\text{sgn} : (-\pi, \pi) \mapsto \mathbb{R},\ \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \in (-\pi, 0) \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x \in (0, \pi) \end{cases}$$

In exemplul 7.3 s-a demonstrat egalitatea:

$$\text{sgn}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\ \forall\, x \in (-\pi, \pi).$$

Notăm cu $S_n$ şirul sumelor parţiale:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\ \forall\, x \in (-\pi, \pi).$$

In punctul $x = 0$ funcţia sgn nu este continuă ; seria sa Fourier converge (conform criteriului lui Dirichlet) la $\frac{1}{2}(-1+1) = 0 = \text{sgn}(0)$; convergenţa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \text{sgn}(x)$, $\forall\, x \in (-\pi, \pi)$ este punctuală , nu şi uniformă .
**a.** Să se demonstreze egalitatea:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt,\ \forall\, x \in (-\pi, \pi).$$

**b.** Să se arate că funcţia $S_n$ are un maxim în punctul $x = \frac{\pi}{2n}$ şi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 1,1789.$$

**c.** Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \text{sgn}(0+) \right|.$$

*Demonstraţie.* **a.** Calculăm mai întâi suma

$$A = \cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x,\ \forall\, x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Pentru aceasta, considerăm şi suma $B = \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x$ şi calculăm:

$$A + iB =$$

$$= (\cos x + i \sin x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + ... + (\cos(2n-1)x + i \sin(2n-1)x) =$$

$$= z^2 \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1},$$

unde am notat $z = \cos x + i \sin x$. După calcule, rezultă :

$$A + iB = \frac{\sin nx}{\sin x}(\cos nx + i \sin nx),$$

şi deci:

$$\cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x},\ \forall\, x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Integrând de la 0 la $x$, rezultă :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{2\sin t}\, dt,$$

sau, înmulţind cu $\frac{4}{\pi}$:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt,\ \forall\, x \in (-\pi, \pi).$$

**b.** Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x}$$

şi deci $\frac{\pi}{2n}$ este punct critic al lui $S_n$; într-o vecinătate a lui $\frac{\pi}{2n}$ avem:

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} > 0,\ x < \frac{\pi}{2n},$$

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} < 0,\ x > \frac{\pi}{2n}.$$

Rezultă că $x = \frac{\pi}{2n}$ este punct de maxim al funcţiei $S_n$.
Calculăm acum:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\, \frac{du}{2n} = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\, du.$$

Rezultă :

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Ultima integrală se aproximează dezvoltând funcţia sinus în serie de puteri:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du = \int_0^{\pi} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\, x^{2n-2}\right) du =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n-1)} x^{2n-1}\Big|_0^{\pi} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

Seria fiind alternată , eroarea este mai mică decât primul termen neglijat. Cu o eroare mai mică decât $10^{-3}$, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \approx 1,1789.$$

**c.** Rezultă : $\lim\limits_{n\to\infty} \left|S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sgn}(0+)\right| \approx 0,1789.$ □

**Exemplul 7.4.** Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = x$, pe $(-\pi, \pi)$.

*Demonstraţie.* Intrucât funcţia $f$ e impară avem:

$$a_k = 0, k \geq 0,$$

iar $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin kx dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, k > 0$ (am integrat prin părţi, ţinând cont că $\sin k\pi = 0$ şi $\cos k\pi = (-1)^k$)

Prin urmare,$\forall x \in R$ avem $x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$.

Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ se obţine $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$. □

**Exemplul 7.5.** Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \pi^2 - x^2$, pe $(-\pi, \pi)$ şi să se demonstreze că $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

*Demonstraţie.* Deoarece funcţia e pară $b_k = 0, k \geq 1$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos kx dx = \frac{4(-1)^{k-1}}{k^2}, k \geq 1$$

(am integrat prin părţi)

Atunci $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos kx$.

Sunt îndeplinite condiţiile criteriului lui Dirichlet, deci dezvoltarea e valabilă pentru $x \in [-\pi, \pi]$.

Pentru $x = \pi$ se obţine $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

**Exemplul 7.6.** Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{dacă } x \in (-\pi, 0) \\ bx, & \text{dacă } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

*Demonstraţie.*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx dx + \int_0^\pi bx\cos nx dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi ax\sin nx dx\right)$$

Calculând prin părţi următoarele două integrale obţinem

$$\int x\cos nxdx = \frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx + c_1$$

$$\int x\sin nxdx = -\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx + c_2$$

unde $c_1, c_2$ sunt constante de integrare.

Avem

$$\int_{-\pi}^{0} t\cos ktdt = \frac{1}{k^2}[1-(-1)^k], \int_{0}^{\pi} t\cos ktdt = -\frac{1}{k^2}[1-(-1)^k]$$

$$\int_{-\pi}^{0} t\sin ktdt = -\pi\frac{(-1)^k}{k}, \int_{0}^{\pi} t\sin ktdt = -\pi\frac{(-1)^k}{k}$$

$$a_k = \frac{a-b}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^2}, b_k = (a+b)\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Se observă că avem

$$a_{2n-1} = \frac{2(a-b)}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}, a_{2n} = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este

$$f(t) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nt}{n}$$

**Observaţia 7.4.** Din această dezvoltare putem calcula suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ care este convergentă . Intr-adevăr, funcţia $f(t)$ este continuă în punctul $t = 0$ şi, conform criteriului lui Dirichlet, suma seriei Fourier în punctul $t = 0$ este egală cu $f(0)$. Avem astfel

$$0 = f(0) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

de unde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

□

**Exemplul 7.7.** Să se dezvolte în serie de sinusuri funcţia $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definită în intervalul (0,l).

*Demonstraţie.* Prelungim funcţia $f$ impar faţă de origine

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 < x < l \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } -l < x < 0 \end{cases}$$

Calculăm coeficienţii Fourier ai acestei funcţii periodice impare definite pe intervalul (-l,l):

$$a_n = 0, \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l 1 \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n+1}, & \text{dacă } n = 2k+1 \\ 0, & \text{dacă } n = 2k \end{cases}$$

Atunci $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}$. □

**Exemplul 7.8.** Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x - \cos x, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

*Demonstraţie.* Observăm că

$$f_1(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_2(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Deci $f_1(x) = f_2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

De aceea dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcţiei $f$ coincide cu dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcţiei $f_1$ definită pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$.

Prelungim funcţia $f_1$ par faţă de origine şi obţinem coeficienţii Fourier:

$$b_n = 0, \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x + \frac{\pi}{4})dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos 2nxdx = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{1-4n^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}, & \text{dacă } n = 2k \\ 0, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$$

Atunci $f(x) = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{1-16n^2}$. □

**Exemplul 7.9.** Să se dezvolte funcţia $f(x) = \cos ax$ după sinusuri în intervalul $[0, \pi]$, $a \neq 0$.

*Demonstraţie.* Se prelungeşte prin imparitate în intervalul $(-\pi, 0)$.

Avem $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(a+n)x + \sin(n-a)x]dx$

Pentru $|a| = n \Longrightarrow b_n = 0$.

Pentru $|a| \neq n \Longrightarrow b_n = \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2-a^2} \cdot [1-(-1)^n \cos a\pi]$

Dacă $|a|$ nu este natural, atunci

$$b_{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2 - a^2]}(1+\cos a\pi)$$

şi

$$b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2-a^2)}(1-\cos a\pi), k \in \mathbb{N}$$

astfel că

$$\cos ax = \frac{2}{\pi}(1+\cos a\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k-1)^2-a^2}\sin(2k-1)x +$$

$$+\frac{2}{\pi}(1-\cos a\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-a^2}\sin 2kx$$

Dacă $a = 2m$, atunci $b_{2k-1} = \frac{4(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2-4m^2]}, b_{2k} = 0$ şi

$$\cos 2mx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k-1)^2-4m^2}\sin(2k-1)x, x \in [0,\pi].$$

Dacă $a = 2m-1$, atunci $b_{2k-1} = 0, b_{2k} = \frac{8k}{\pi[4k^2-(2m-1)^2]}$ şi

$$\cos(2m-1)x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-(2m-1)^2}\sin 2kx, x \in [0,\pi]. \qquad \square$$

**Exemplul 7.10.** Să se dezvolte în serie Fourier $f(x) = 10 - x$ în $(5, 15)$.

*Demonstraţie.* $a_0 = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)dx = 0$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{1}{n\pi}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}/_5^{15} +$$
$$+\frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\sin\frac{n\pi x}{5}dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = -\frac{1}{n\pi}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}/_5^{15} -$$
$$-\frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\cos\frac{n\pi x}{5}dx = (-1)^n\frac{10}{n\pi}$$

Atunci $f(x) = \frac{10}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$. $\square$

**Exemplul 7.11.** Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ pe $\mathbb{R}$.

*Demonstraţie.* $f$ e pară , deci $b_k = 0, k \geq 1$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(s-a făcut schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$)

Fie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (1)

Inmulţim ambii membri ai egalităţii (1) cu $2(2+\cos x)$ şi obţinem:

$$2 = 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos x \cos nx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 = 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]$$

Funcţia $g(x) = 2$ poate fi considerată ca o funcţie pară , deci dezvoltabilă în serie Fourier de cosinusuri pe toată axa reală . Tinând seama de egalitatea a două serii Fourier obţinem:

$$2 = 2a_0 + a_1$$

$$0 = a_0 + 4a_1 + a_2$$

$$0 = 4a_k + a_{k+1} + a_{k-1}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$

Sirul $a_k$ este un şir ce verifică relaţia de recurenţă liniară

$$a_k = -4a_{k-1} - a_{k-2}$$

cu $a_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $a_1 = 2 - 2a_0 = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}$

Ecuaţia caracteristică ataşată este $r^2 + 4r + 1 = 0$ cu soluţiile $r_1 = -2 + \sqrt{3}, r_2 = -2 - \sqrt{3}$.

Atunci $a_k = c_1(-2-\sqrt{3})^k + c_2(-2+\sqrt{3})^k$, constantele $c_1, c_2$ determinându-se din $a_0$ şi $a_1$. Deci obţinem sistemul:

$$c_1 + c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$c_1(-2-\sqrt{3}) + c_2(-2+\sqrt{3}) = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}$$

Aşadar, $c_1 = 0$ şi $c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Obţinem $a_k$ de forma $a_k = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-2)^k$.

Deci $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{3}-2)^n \cos nx$. □

**Exemplul 7.12.** Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3+x^3}dx.$$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de variabilă $x = nt$ în integrala $b_n = n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3+x^3}dx$ şi obţinem $b_n = \int_0^1 \frac{\sin nt}{1+t^3}dt$.

Funcţia $f(t) = \frac{1}{1+t^3}$ e continuă pe [0,1] şi $b_n$ fiind coeficientul ei Fourier şi seria Fourier fiind convergentă , rezultă $b_n \longrightarrow 0$, când $n \longrightarrow \infty$. □

**Exemplul 7.13.** Fie $f$ şi $F$ două funcţii de pătrat integrabile definite pe $[-\pi, \pi]$ şi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

seriile Fourier ataşate lor. Să se arate că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n).$$

*Demonstraţie.* Seriile Fourier ataşate funcţiilor $f+F$ şi $f-F$ sunt

$$f(x)+F(x) = \frac{a_0+A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+A_n)\cos nx + (b_n+B_n)\sin nx]$$

$$f(x)-F(x) = \frac{a_0-A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-A_n)\cos nx + (b_n-B_n)\sin nx]$$

Deoarece $f$ şi $F$ sunt funcţii de pătrat integrabile, atunci şi $f+F$ şi $f-F$ sunt funcţii de pătrat integrabile.

Egalitatea lui Parseval ne conduce la:

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+F(x)]^2dx = \frac{(a_0+A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+A_n)^2 + (b_n+B_n)^2]$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2dx = \frac{(a_0-A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-A_n)^2 + (b_n-B_n)^2]$

Scăzând cele două egalităţi obţinem:

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = 4\left[\frac{a_0A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n)\right] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n)$$

□

## 7.2 Integrala Fourier

In această secţiune vom prezenta în liniile esenţiale consideraţiile remarcabile, deşi lipsite de rigurozitate, care au condus pe Fourier la formula sa integrală . Vom demonstra formula integralei Fourier ca un caz limită al seriei Fourier. Parametrul $m$ ce lua valori naturale va fi înlocuit aici cu un parametru $z$ variind continuu, iar seria infinită va devini o integrală .

Dacă funcţia $f$ este dată în intervalul $[-l, l]$, ea poate fi reprezentată , în anumite condiţii care nu ne interesează aici, în acest interval, prin seria trigonometrică

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l},$$

unde

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{m\pi u}{l}du, \;\; m = 0, 1, 2, \ldots$$

şi

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{m\pi u}{l}du, \;\; m = 1, 2, \ldots$$

Atunci putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{m\pi}{l}(u-x)du. \qquad (7.15)$$

Presupunem acum că funcţia $f$ este definită în tot intervalul $(-\infty, \infty)$. In acest caz, oricare ar fi $x$, valoarea corespunzătoare a lui $f$ se exprimă prin dezvoltarea (7.15), pentru orice $l > |x|$. Trecând aici la limită când $l \longrightarrow \infty$, vom încerca să stabilim forma limită a acestei dezvoltări.

Primul termen al membrului drept al egalităţii (7.15) este natural să se considere că tinde către 0 (lucru evident, dacă se presupune că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du$ este convergentă ). In seria infinită putem privi $\frac{m\pi u}{l}$ drept valori discrete $z_1 = \frac{\pi}{l}, z_2 = \frac{2\pi}{l}, \ldots, z_m = \frac{m\pi}{l}, \ldots$ ale unei variabile oarecare $z$, variind continuu de la 0 la $\infty$. In acest caz, creşterea

$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m = \frac{\pi}{l}$ tinde către 0 când $l \longrightarrow \infty$. Cu aceste notaţii seria se transcrie $\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-l}^{l} f(u)\cos z_m(u-x)du$. Ea aminteşte de suma Riemann a funcţiei $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)du$ de variabilă $z$ în intervalul $[0,\infty]$. Trecând la limită când $l \longrightarrow \infty$, în locul seriei obţinem o integrală şi astfel ajungem la **formula integrală a lui Fourier**

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)du. \tag{7.16}$$

Dezvoltând cosinusul diferenţei obţinem

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(z)\cos zx + b(z)\sin zx]dz,$$

unde $a(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos zudu$, $b(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin zudu$.

Coeficienţii $a(z)$ şi $b(z)$ amintesc prin structura lor de coeficienţii Fourier.

Toate aceste consideraţii au numai un caracter de inducţie, condiţiile reale de valabilitate a formulei lui Fourier vor fi stabilite, urmând principalele etape ale raţionamentelor în legătură cu seriile Fourier.

Presupunem că funcţia $f$ este absolut integrabilă în intervalul $(-\infty,\infty)$ şi considerăm integrala

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x_0)du,$$

unde $A$ este un număr pozitiv arbitrar, iar $x_0$ o valoare oarecare fixată a lui $x$. Această integrală reprezintă un analog al sumei parţiale a seriei Fourier; integrala Fourier

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x_0)du \tag{7.17}$$

se obţine când $A \longrightarrow \infty$.

Cum $f$ este absolut integrabilă şi pe $[-B,B]$, $B>0$, schimbăm ordinea de intregare şi obţinem

$$\begin{aligned} &\int_0^{A} dz \int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u-x_0)du = \\ &\int_{-B}^{B} f(u)du \int_0^{A} \cos z(u-x_0)dz = \int_{-B}^{B} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du \end{aligned} \tag{7.18}$$

Dar

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x_0)du\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)\cos z(u-x_0)|du \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|du,$$

deci integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x_0)du$ este majorată de integrala convergentă $\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|du$ şi prin urmare este uniform convergentă în raport cu $z$. Aşadar, integrala $\int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u-x_0)du$ în care $B\longrightarrow\infty$, va tinde uniform către limita sa $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x_0)du$. De aceea, trecând la limită când $B\longrightarrow\infty$ în egalitatea (7.16), se poate efectua în prima integrală trecerea la limită sub semnul integral şi obţinem

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du$$

Integrala se poate aduce la forma

$$\begin{aligned} &J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt= \\ &\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt \end{aligned} \tag{7.19}$$

Avem un rezultat analog Lemei 7.1 :

**Lema 7.3.** *Dacă $g$ este absolut integrabilă în intervalul $[a,\infty)$, atunci*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^{\infty} g(t)\sin ptdt=0$$

*şi*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^{\infty} g(t)\cos ptdt=0.$$

Inmulţim ambii membri ai egalităţii

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt$$

cu numărul $S_0$, valoarea presupusă a integralei (7.17), şi scădem rezultatul membru cu membru din egalitatea (7.19) şi obţinem

$$J(A)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0]\frac{\sin At}{t}dt \tag{7.20}$$

Dacă funcţia $f$ este continuă în punctul $x_0$, atunci $S_0=f(x_0)$, iar dacă $f$ are în $x_0$ dicontinuitate de prima speţă , atunci $S_0=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}$.

**Criteriul 7.5.** *(**Criteriul lui Dini**) Integrala Fourier a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ este convergentă şi are valoarea $S_0$, dacă pentru $h>0$ oarecare, integrala*

$$\int_0^h\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0|}{t}dt$$

*este convergentă .*

Scriem integrala (7.20) sub forma

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0]\frac{\sin At}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{h}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0]\frac{\sin At}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0]\frac{\sin At}{t}dt.$$

Prima integrală tinde către 0 când $A\longrightarrow\infty$ conform Lemei 7.1. Cea de-a doua integrală o descompunem astfel

$$\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0]\frac{\sin At}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt-\frac{2}{\pi}S_0\int_h^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt.$$

Cum funcţia $f$ este absolut integrabilă , atunci $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}$ este absolut integrabilă şi conform Lemei 7.3, integrala $\int_h^{\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt$ tinde către 0 când $A\longrightarrow\infty$. Integrala $\int_h^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt=\int_{Ah}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$ tinde către 0, din definiţia integralei improprii.

De aici putem obţine ca şi în cazul seriilor Fourier criterii mai simple:

**Criteriul 7.6.** *(**Criteriul lui Dirichlet-Jordan**) Integrala Fourier a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ este convergentă şi are valoarea $S_0$, dacă într-un interval oarecare $[x_0-h,x_0+h]$, funcţia $f$ are variaţie mărginită .*

*Demonstraţie.* Dacă scriem integrala $J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt$ ca sumă de două integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{h}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt,$$

am stabilit anterior că cea de-a doua integrală tinde către 0 când $A\longrightarrow\infty$. Prima integrală tinde către $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]=S_0$ conform Lemei 7.2. Intr-adevăr, funcţia $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ are în intervalul $[0,h]$ variaţie mărginită , deci ea se reprezintă ca diferenţa a două funcţii crescătoare, fiecăreia aplicându-i-se separat Lema 7.2. □

Având în vedere că integrala interioară din (7.17) este o funcţie pară de variabilă $z$, această formulă se poate transcrie astfel :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos z(u-x)du. \tag{7.21}$$

# Capitolul 8

# Transformarea Fourier

## 8.1 Transformarea Fourier a funcţiilor integrabile pe $\mathbb{R}$

In cele ce urmează se va nota cu $L^1(\mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pentru care $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$

**Definiţia 8.1.** Se numeşte **transformarea Fourier** a funcţiei $f \in L^1(\mathbb{R})$ o funcţie $\mathcal{F}[f]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt \tag{8.1}$$

Funcţia $\mathcal{F}[f](\omega)$ se mai numeşte **funcţia spectrală** sau **spectrul (în frecvenţă)** al semnalului $f(t)$; prin transformarea Fourier semnalelor în timp le corespund spectrele lor.

Dacă $f$ este o funcţie pară , atunci (8.1) se scrie sub forma:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \ \ \omega \in \mathbb{R} \tag{8.2}$$

şi se numeşte **transformarea Fourier prin cosinus a funcţiei** $f$, iar dacă $f$ este impară , atunci:

$$\mathcal{F}[f](w) = -2\mathrm{i}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t, \ \ \omega \in \mathbb{R} \tag{8.3}$$

şi se numeşte **transformarea Fourier prin sinus a funcţiei** $f$.

**Teorema 8.1.** ***(formula Fourier de inversare)*** *Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie din $L^1(\mathbb{R})$. Notând cu $\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt$ transformata Fourier a lui $f$ şi presupunând că $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)| < \infty$, rezultă*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}d\omega, \ \ \textit{pentru orice } t \in \mathbb{R} \tag{8.4}$$

## 8.2 Proprietăţile transformării Fourier

1. ***(Liniaritatea)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ , iar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, atunci

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

2. ***(Simetria)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$.

3. ***(Schimbarea de scală)*** Pentru $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ avem

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F(\frac{\omega}{\alpha}).$$

**Exemplul 8.1.** Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}, a > 0$.

*Demonstraţie.* Avem

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)dt =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos\omega t dt = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})dt = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega - 1} + \frac{1}{\mathrm{i}\omega + 1} = \frac{2}{\omega^2 + 1}.$$

Conform schimbării de scală obţinem :

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{2}{a(\frac{\omega^2}{a^2} + 1)} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

□

4. ***(Translaţia timpului)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $t_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}.$$

**Exemplul 8.2.** Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f(t) = \mathrm{e}^{-7|t+4|}, a > 0$.

*Demonstraţie.* Conform teoremei de translaţie a timpului şi exemplului 8.1 avem:

$$F(\omega) = \frac{14\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\omega}}{\omega^2 + 49}$$

□

5. ***(Translaţia frecvenţei)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $\omega_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

6. ***(Derivarea în raport cu timpul)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $f$ este de $n$ ori derivabilă, atunci $\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega)$.

7. ***(Derivarea în raport cu frecvenţa)***

   Dacă funcţiile $f(t), tf(t), \dots\ t^n f(t)$ sunt integrabile pe $\mathbb{R}$, iar $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci

$$(-\mathrm{i}t)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}.$$

   **Exemplul 8.3.** Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f(t) = t\mathrm{e}^{-\alpha t^2}, \alpha > 0$.

   *Demonstraţie.* Calculăm transformata Fourier a semnalului gaussian

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2}.$$

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos\omega t dt - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin\omega t dt =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos\omega t dt \Longrightarrow F_1'(\omega) = -2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t\sin\omega t dt = -\frac{1}{2}\omega F_1(\omega)$$

   (s-a integrat prin părţi)

   S-a obţinut o ecuaţie cu variabile separabile a cărei soluţie este:

$$F_1(\omega) = c\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$c = F_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \sqrt{\pi} \Longrightarrow F_1(\omega) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

   Scriem $\mathrm{e}^{-\alpha t^2} = \mathrm{e}^{-(\sqrt{\alpha}t)^2}$ şi folosind schimbarea de scală obţinem:

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\alpha t^2}](\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} F_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

   Conform teoremei de derivare în raport cu frecvenţa avem:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(-\frac{\omega}{2\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}\omega\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

   □

8. ***(Transformata complex conjugatei)*** Dacă $f^*(t)$ este complex conjugata funcţiei $f$ şi $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci $f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$.

9. ***(Teorema de convoluţie în timp)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, iar $h(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ este produsul de convoluţie al funcţiilor $f$ şi $g$, atunci $f * g(t) \leftrightarrow F(\omega)G(\omega)$.

10. ***(Teorema de convoluţie în frecvenţa)*** In condiţiile proprietăţii precedente avem $f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(\omega - y)dy$.

11. Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci $F$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$ şi, în plus, $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} |F(\omega)| = 0$.

12. Dacă $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este un şir de funcţii convergent către funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în spaţiul $L^1(\mathbb{R})$, adică

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|dt = 0,$$

iar $f_n(t) \leftrightarrow F_n(\omega)$, $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci şirul $F_n$ converge către $F$ uniform pe $\mathbb{R}$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} |F_n(\omega) - F(\omega)| = 0$.

**Exemplul 8.4.** Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & \text{dacă } |t| \le T \\ 0, & \text{dacă } |t| > T \end{cases}$$

(impulsul triunghiular de lungime $2T$)

*Demonstraţie.* Cum $q_T$ e funcţie pară , atunci

$$F(\omega) = 2\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)\cos\omega t dt = 2\int_0^T \frac{\sin\omega t}{T\omega}dt =$$
$$= 2\frac{1}{T\omega}\int_0^T \sin\omega t dt = \frac{2(1-\cos\omega T)}{T\omega^2} = \frac{4\sin^2\frac{T\omega}{2}}{T\omega^2}$$

(integrala s-a rezolvat prin părţi) □

**Exemplul 8.5.** Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$\sin c(t) = \frac{\sin t}{t} \text{ (sinusul cardinal).}$$

*Demonstraţie.* Cum $\sin c(t)$ e funcţie pară avem

$$F(\omega) = 2\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cos\omega t dt = \int_0^\infty \frac{\sin t(1+\omega) + \sin t(1-\omega)}{t}dt =$$
$$= \frac{\pi}{2}[\operatorname{sgn}(1+\omega) + \operatorname{sgn}(1-\omega)]$$

(am folosit relaţia $\int_0^\infty \frac{\sin at}{t}dt = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a$) □

**Exemplul 8.6.** Să se rezolve ecuaţia integrală :

$$\int_0^\infty y(t)\cos txdt = \frac{1}{x^2+1}.$$

*Demonstraţie.* Prelungim $y(t)$ prin paritate la $(-\infty, \infty)$ şi obţinem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cos txdt = \frac{2}{x^2+1}$$

Cum $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\sin txdt = 0$ avem:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}dt = \frac{1}{2}\frac{2}{x^2+1}$$

Inmulţim această egalitate cu $\frac{1}{\pi}$ şi conform formulei de inversare obţinem că $y(t) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi(x^2+1)}\right](t)$, adică $y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}dx$

Rezolvăm integrala cu teorema reziduurilor şi avem: $y(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ □

Utilizând definiţia transformării Fourier şi proprietăţile precedente se pot deduce transformatele Fourier ale unor funcţii remarcabile, pe care le dăm în tabelul 8.1.

Tabelul 8.1

| Nr. | $f(t)$ | $\mathcal{F}[f](\omega)$ |
|---|---|---|
| 1 | $h(t+t_0)-h(t-t_0)$, $t_0>0$ | $2t_0S_a(\omega t_0)$ |
| 2 | $\frac{\omega_0}{\pi}S_a(\omega_0 t)$, $\omega_0>0$ | $h(\omega+\omega_0)-h(\omega-\omega_0)$ |
| 3 | $h(t)-h(t_0)$, $t_0>0$ | $t_0S_a(\omega t_0)+\frac{1}{2\mathrm{i}}\omega t_0^2S_a^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)$ |
| 4 | $\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$, $\omega_0>0$ | $\frac{2\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}$ |
| 5 | $-h(t+t_0)+2h(t)-h(t-t_0)$, $t_0>0$ | $\frac{1}{\mathrm{i}}\omega t_0^2S_a^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)$ |
| 6 | $\mathrm{e}^{-\omega_0 t}h(t)$, $\omega_0>0$ | $\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}+\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\omega}{\omega_0^2+\omega^2}$ |
| 7 | $\mathrm{e}^{-\omega_0\lvert t\rvert}\mathrm{sgn}\,t$, $\omega_0>0$ | $\frac{2}{\mathrm{i}}\frac{\omega}{\omega_0^2+\omega^2}$ |
| 8 | $\left(1-\frac{\lvert t\rvert}{t_0}\right)(h(t+t_0)-h(t-t_0))$, $t_0>0$ | $t_0S_a^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)$ |
| 9 | $\mathrm{e}^{-\omega_0^2t^2}$, $\omega_0>0$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{\omega_0}\mathrm{e}^{-\omega^2/4\omega_0^2}$ |

a) Funcţia lui Heaviside $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \geq 0 \end{cases}$$

b) Funcţia "sinus atenuat" $S_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$S_a(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{dacă } t \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$$

c) Funcţia semn $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, & \text{dacă } t < 0 \\ 0, & \text{dacă } t = 0 \\ 1, & \text{dacă } t > 0 \end{cases}$$

## 8.3 Distribuţii

**Definiţia 8.2.** Se numeşte **funcţie test** o funcţie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă şi nulă în afara unui interval compact.

Notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea funcţiilor test.

**Exemplul 8.7.** Funcţia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}), & \text{pentru } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{pentru } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

definită pentru orice $\varepsilon > 0$ este o funcţie test.

**Definiţia 8.3.** Spunem că şirul $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de funcţii test **converge către zero**, dacă acest şir se anulează în afara unui compact (acelaşi pentru toate) şi dacă el converge uniform către zero împreună cu şirul derivatelor de orice ordin.

**Definiţia 8.4.** Se numeşte **distribuţie** o aplicaţie liniară $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că dacă un şir de funcţii test $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge către zero, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi_n) = 0$.

Mulţimea distribuţiilor pe $\mathcal{D}$ se notează $\mathcal{D}'$.

Un spaţiu de distribuţii cu valori reale este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ dacă se definesc operaţiile:

1. *(adunarea)* Fiind date distribuţiile $f$ şi $g$ se defineşte distribuţia sumă $f + g$ prin relaţia:

$$(f + g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$$

pentru orice funcţie test $\varphi$.

2. *(înmulţirea cu scalari)* Fiind dată distribuţia $f$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, distribuţia $\alpha f$ se defineşte prin relaţia:

$$(\alpha f)(\varphi) = f(\alpha\varphi) = \alpha f(\varphi)$$

pentru orice funcţie test $\varphi$.

**Exemplul 8.8.** **Distribuţia Dirac în punctul** $a$ este funcţionala $\delta_a \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Dacă $a = 0$, atunci se scrie simplu $\delta$ în loc de $\delta_0$.

*Demonstraţie.* Aplicaţia $\delta_a$ este $\mathbb{R}$-liniară , deoarece $\forall\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ şi $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\delta_a(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\varphi(a) + \mu\psi(a) = \lambda\delta_a(\varphi) + \mu\delta_a(\psi).$$

Dacă $\varphi_n \longrightarrow 0$ (în $\mathcal{D}$), atunci există un interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât toate $\varphi_n$ se anulează în afară lui $I$, $\varphi_n$ converg uniform (împreună cu toate derivatele) către 0 pentru $n \longrightarrow \infty$.

Dacă $a \in I$ rezultă că $\varphi_n(a) \longrightarrow 0$, adică $\delta_a(\varphi_n) \longrightarrow 0$, iar dacă $a$ nu aparţine lui $I$, atunci $\varphi_n(a) = 0$ şi $\delta_a(\varphi_n) \longrightarrow 0$. □

**Exemplul 8.9. Distribuţia lui O. Heaviside**

$$H \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \ \ \varphi \longmapsto \int_0^\infty \varphi(x)dx$$

*Demonstraţie.* Evident $H$ este $\mathbb{R}$-liniară .

Dacă $\varphi_n \longrightarrow 0$ (în $\mathcal{D}$), atunci şirul $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniform către 0 pe un interval compact $I$ în afara căruia funcţiile $\varphi_n$ se anulează , deci

$$\lim_{n\to\infty} H(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)dx = \int_I 0dx = 0.$$

□

**Exemplul 8.10.** Distribuţia $f = VP\frac{1}{t}$, numită **valoarea principală a lui** $\frac{1}{t}$ definită prin

$$f(\varphi) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}\varphi(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}dt \right), \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{D}.$$

*Demonstraţie.* Deoarece $\varphi$ este nulă îm afara unui interval $[-R, R]$, iar

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(0)}{t}dt \right) = 0$$

rezultă că

$$f(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}dt \right) \tag{8.5}$$

In general, dacă $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, funcţia

$$v(x) = \begin{cases} \frac{u(x)-u(0)}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ u'(0), & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este de clasă $\mathcal{C}^k$; de fapt $v(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u'(t)dt = \int_0^1 u'(x\tau)d\tau$. In plus, pentru orice $R > 0$ şi pentru orice $x \in [-R, R]$ avem $|v(x)| \leq \sup\limits_{x\in[-R,R]} |u'(x)|$. Folosind această observaţie, deoarece $\varphi \in \mathcal{D}$, rezultă că funcţia

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{x}, & \text{dacă } t \neq 0 \\ \varphi'(0), & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$$

este continuă şi satisface condiţia $|\psi(t)| \leq M$ pentru orice $t \in [-R, R]$, unde $M = \sup\limits_{t\in[-R,R]} |\varphi'(t)|$. Atunci $\left|\int_{-R}^{-\varepsilon} \psi(t)dt + \int_{\varepsilon}^{R} \psi(t)dt\right| \leq 2RM$ şi limita (8.5) există şi defineşte un număr real $f(\varphi)$ bine determinat. Asocierea $\varphi \longmapsto f(\varphi) = v.p.\int_{-R}^{R} \psi(t)dt$ dată de (8.5) este evident liniară . In plus, dacă $\varphi_n \longrightarrow 0$ (în $\mathcal{D}$), atunci toate $\varphi_n$ sunt nule în afara unui interval $[-R, R]$ şi avem $|f(\varphi_n)| \leq 2RM_n$, unde $M_n = \sup\limits_{t\in[-R,R]} |\varphi_n'(t)|$. Dar $\varphi_n' \longrightarrow 0$ uniform pe $[-R, R]$, deci $M_n \longrightarrow 0$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi_n) = 0$. Aşadar, funcţionala $f = VP\frac{1}{t}$ este o distribuţie. □

**Definiţia 8.5.** O funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numeşte **local integrabilă** dacă este mărginită şi integrabilă pe orice compact. Mulţimea acestor funcţii se notează cu $L^1_{loc}$.

In exemplul următor vom da un procedeu de fabricare a distribuţiilor.

**Exemplul 8.11.** Fie $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă . Pentru orice funcţie test $\varphi \in \mathcal{D}$ luăm

$$\underline{u}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)dx.$$

Atunci $\underline{u}$ este o distribuţie. O distribuţie definită în acest fel este numită **distribuţie regulată** (asociată funcţiei local integrabile $u$) (sau **de tip funcţie**).

*Demonstraţie.* Deoarece $\varphi$ este continuă şi se anulează în afara unui interval compact $J$, integrala se calculează de fapt pe $J$. Obţinem astfel o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $\underline{u}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ asociată funcţiei $\underline{u}$. Dacă $\varphi_n \longrightarrow 0$ (în $\mathcal{D}$), atunci $\varphi_n = 0$ în afara unui interval compact $I$ şi $\varphi_n \longrightarrow 0$ converge uniform pe $I$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \underline{u}(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I u(x)\varphi_n(x)dx =$$

$$= \int_I u(x) \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)dx = \int_I u(x) \cdot 0 dx = 0.$$

Deci $\underline{u}$ este o distribuţie. □

**Definiţia 8.6.** O distribuţie care nu este regulată este numită **singulară**.
**Observaţia 8.1.** Distribuţia $\delta$ a lui Dirac este singulară .

*Demonstraţie.* Presupunem că $\delta$ ar fi o distribuţie regulată asociată unei funcţii $u \in L^1_{loc}$. Deci $\delta = \underline{u}$, adică

$$\delta(\varphi) = \underline{u}(\varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)dx, (\forall)\varphi \in \mathcal{D}$$

Fie

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} c_n \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{n^2x^2-1}}, & \text{pentru } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \geq 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

unde $c_n$ sunt constante care pot fi alese astfel încât $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)dx = 1$, $n \geq 1$. Rezultă $\varphi_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi_n(x)dx$, adică $\frac{c_n}{\mathrm{e}} = \int_{-1}^{1} u(x)\varphi_n(x)dx$, $\forall n \geq 1$. Cum $u$ este mărginită pe $[-1,1]$, fie $M = \sup_{t\in[-1,1]} |u(x)|$, deci $\frac{c_n}{\mathrm{e}} \leq M \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)dx = M$. Ar rezulta $c_n \leq M\mathrm{e}$, dar $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, deoarece pentru orice $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ avem $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{n^2x^2-1}} \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$, deci

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} c_n \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{n^2x^2-1}} dx \leq c_n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\mathrm{e}} dx = \frac{2c_n}{n\mathrm{e}},$$

adică $c_n \geq \frac{n\mathrm{e}}{2}$. □

Alte operaţii cu distribuţii mai sunt :

1. *(produsul cu o funcţie din $C^\infty(\mathbb{R})$)* Dacă $f$ este o distribuţie şi $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, atunci $af$ este distribuţia definită prin:

   $$(a \cdot f)(\varphi) = f(a\varphi)$$

   pentru orice funcţie test $\varphi$.

2. *(derivarea distribuţiilor)* Pentru orice distribuţie $f \in \mathcal{D}'$ se definesc derivatele $f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ (care sunt distribuţii) prin

   $$f'(\varphi) = -f(\varphi'), f''(\varphi) = f\varphi''), \ldots, f^{(n)}(\varphi) = (-1)^n f(\varphi^{(n)})$$

   pentru orice $n \geq 1$ şi $\varphi \in \mathcal{D}$.

   Aşadar, orice distribuţie este indefinit derivabilă .

   **Exemplul 8.12.** Derivata distribuţiei Heaviside este distribuţia $\delta$ a lui Dirac : $H' = \delta$.

*Demonstraţie.* Arătăm că $H'(\varphi) = \delta(\varphi)$, adică $-H(\varphi') = \delta(\varphi)$. Dar

$$-H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^{\infty} = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

deci rezultă că $H' = \delta$. □

**Exemplul 8.13.** Să se arate că dacă $\alpha \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, atunci

$$(\alpha\delta)' = \alpha(0)\delta'.$$

*Demonstraţie.* Fie $\varphi \in \mathcal{D}$. Arătăm $(\alpha\delta)'(\varphi) = \alpha(0)\delta'(\varphi)$ :

$$(\alpha\delta)'(\varphi) = -(\alpha\delta)(\varphi') = -\delta(\alpha\varphi') = -(\alpha\varphi')(0) =$$

$$= -\alpha(0)\varphi'(0) = \alpha(0)(-\delta(\varphi')) = \alpha(0)\delta'(\varphi)$$

□

**Exemplul 8.14.** Să se calculeze $\underline{\alpha H}''$, unde $\alpha(x) = x^2$.

*Demonstraţie.* Conform formulei Leibniz-Newton avem:

$$(\underline{x^2 H})'' = C_2^0 \underline{H} \cdot 2 + C_2^1 \underline{H}' \cdot 2x + C_2^0 \underline{H}'' \cdot x^2 = 2\underline{H} + 4\delta x + \delta' x^2 = 2\underline{H},$$

deoarece :

$$(4x\delta)(\varphi) = \delta(4x\varphi) = (4x\varphi)(0) = 0$$

$$(\delta' x^2)(\varphi) = \delta'(x^2\varphi) = -\delta((x^2\varphi)') = -\delta(2x\varphi + x^2\varphi') =$$

$$= -[(2x\varphi)(0) + (x^2\varphi')(0)] = 0,$$

pentru $\varphi \in \mathcal{D}$ □

**Exemplul 8.15.** Să se calculeze următoarele derivate distribuţionale:

a) $\underline{\operatorname{sgn} x}'$;

b) $\underline{|x|}'$;

c) $\underline{|x| \sin x}^{(3)}$

*Demonstraţie.*

$$a)\underline{\operatorname{sgn} x}'(\varphi) = -\underline{\operatorname{sgn} x}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \cdot \varphi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)/_0^{\infty} + \varphi(x)/_{-\infty}^{0} = \varphi(0) + \varphi(0) = 2\varphi(0) =$$

$$= 2\delta(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

b) Putem scrie $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$

$$\underline{|x|}' = (\underline{x \cdot \operatorname{sgn} x})' = (x \cdot \underline{\operatorname{sgn} x})' = C_1^0 \underline{\operatorname{sgn} x} \cdot x' + C_1^1 \underline{\operatorname{sgn} x}' \cdot x =$$
$$= \underline{\operatorname{sgn} x} + \underline{\operatorname{sgn} x}' \cdot x = \underline{\operatorname{sgn} x} + 2x\delta = \underline{\operatorname{sgn} x}$$

$$c) \underline{|x| \sin x}^{(3)} = (\sin x \cdot \underline{|x|})^{(3)} = -C_3^0 \underline{|x|} \cdot \cos x + C_3^1 \underline{|x|}' \cdot (-\sin x) +$$
$$+ C_3^2 \underline{|x|}'' \cdot \cos x + C_3^3 \underline{|x|}''' \cdot \sin x = -\underline{|x|} \cos x - 3 \sin x \cdot \underline{\operatorname{sgn} x} +$$
$$+ 6\delta \cdot \cos x + (2\delta)' \cdot \sin x = -\underline{|x|} \cos x - 3 \sin x \cdot \underline{\operatorname{sgn} x} + 4\delta$$

□

**Exemplul 8.16.** Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe porţiuni, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $(-\infty, a)$ şi pe $(a, \infty)$. Fie

$$s_a = f(a+0) - f(a-0)$$

saltul lui $f$ în punctul $a$. Să se arate că $(\underline{f})' = \underline{f'} + s_a \delta_a$.

*Demonstraţie.*

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ \ (\underline{f})'(\varphi) = -\underline{f}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$
$$= -\left( \int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \right) =$$
$$= -f\varphi/_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} f'\varphi + f\varphi/_{a}^{\infty} - \int_{a}^{\infty} f'\varphi =$$
$$= -f(a-0)\varphi(a) + f(a+0)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi = s_a\varphi(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi =$$
$$= s_a\delta_a(\varphi) + \underline{f'}(\varphi)$$

□

**Definiţia 8.7.** Se spune că o distribuţie $f \in \mathcal{D}'$ **se anulează pe un deschis** $U \subset \mathbb{R}$ dacă $f(\varphi) = 0$ pentru orice funcţie test $\varphi \in \mathcal{D}$ care se anulează în afara lui $U$. **Suportul** lui $f$ este mulţimea închisă Supp$f$=complementara celui mai mare deschis pe care $f$ se anulează .

3. *(produsul de convoluţie)* Fie $f, g \in \mathcal{D}'$ două distribuţii, una având suport compact (de exemplu, Supp$f = K$ este compact). Alegem o funcţie test $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egală cu 1 într-un deschis care conţine $K$. Atunci **convoluţia** $h = f * g$ este o distribuţie definită prin $h(\varphi) = f(\psi)$, unde $\psi$ este funcţia definită prin aplicarea distribuţiei $g$ pe funcţia $y \longrightarrow \alpha(y)\varphi(x+y)$, adică $\psi(x) = g(y)(\alpha(y)(\varphi(x+y)))$.

**Proprietăţi ale produsului de convoluţie**

a) $f * g = g * f$ pentru $f, g$ distribuţii

b) $f * \delta = \delta * f = f$ pentru $f$ distribuţie

*Demonstraţie.* Cum $\delta$ are suport compact $K = \{0\}$ rezultă că $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $(f * \delta)(\varphi) = f(\psi)$, unde $\psi(x) = \delta(y)(\alpha(y) \cdot \varphi(x+y)) = \alpha(0) \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$, deci $(f * \delta)(\varphi) = f(\varphi)$, adică $f * \delta = f$. □

c) $f^{(m)} * g = (f * g)^{(m)} = f * g^{(m)}$, $\forall m \geq 1$ pentru $f, g$ distribuţii

*Demonstraţie.* Demonstrăm prin inducţie şi e suficient să considerăm cazul $m = 1$. Din definiţie rezultă că $(f * g)' = f' * g$ şi aplicând a), rezultă $f * g' = g' * f = (g * f)' = (f * g)'$. □

d) $f^{(m)} = f * \delta^{(m)}$, $\forall m \geq 1$ pentru orice distribuţie $f$

*Demonstraţie.* Avem $f^{(m)} = (\delta * f)^{(m)} = \delta^{(m)} * f = f * \delta^{(m)}$ □

**Observaţia 8.2.** Asociativitatea convoluţiei distribuţiilor nu are loc întotdeauna. De exemplu, luând $f = \underline{1}, g = \delta', h = H$, rezultă

$$(f * g) * h = (\underline{1} * \delta') * H = \underline{1}' * H = 0 * H = 0,$$

în timp ce

$$f * (g * h) = \underline{1} * (\delta' * H) = \underline{1} * H' = \underline{1} * \delta = \underline{1}.$$

e) Fie $f, g \in \mathcal{D}'$ astfel încât să existe $f * g$. Atunci $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(t-a) * g(t-b) = f(t-a-b) * g.$$

In particular, au loc formulele de întârziere

$$\delta(t-a) * f = f(t-a)$$

şi

$$\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-a-b).$$

## 8.4 Transformarea Fourier a distribuţiilor

**Definiţia 8.8.** Se numeşte funcţie **rapid crescătoare** o funcţie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clasă $\mathcal{C}^\infty$ şi pentru care toate produsele $x^i f^{(k)}(x)$ de puteri naturale ale lui $x$ şi derivate ale lui $f$ sunt funcţii mărginite. Notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea acestor funcţii.

**Definiţia 8.9.** Un şir $(\psi_n)_{n\geq 1}$ de funcţii din $\mathcal{S}$ este **convergent către zero** (şi se scrie $\psi_n \longrightarrow 0$ în $\mathcal{S}$) dacă pentru orice întregi $j, k \geq 0$ şirul de funcţii $(x^j \psi_n^{(k)})_{n\geq 1}$ converge uniform către zero pe $\mathbb{R}$.

**Definiţia 8.10.** Se numeşte **distribuţie temperată** orice aplicaţie $\mathbb{C}$-liniară $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ astfel încât ori de câte ori $\psi_n \longrightarrow 0$ în $\mathcal{S}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(\psi_n) = 0$. Se notează cu $\mathcal{S}'$ spaţiul tuturor distribuţiilor temperate.

**Definiţia 8.11.** Fie o distribuţie $f \in \mathcal{S}'$. Se numeşte **transformata Fourier a distribuţiei** $f$, distribuţia $\mathcal{F}_f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$F_f(\psi) = f(F(\psi)),\ \ \forall \psi \in \mathcal{S} \tag{8.6}$$

**Exemplul 8.17.** Să se determine transformata Fourier a distribuţiei $\delta$.

*Demonstraţie.* Conform (8.6) avem :

$$F_\delta(\psi) = \delta(F(\psi)) = F(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = \underline{1}(\psi)$$

pentru orice $\psi \in \mathcal{S}$. Deci $F_\delta = \underline{1}$.

Analog $F_{\delta^{(k)}} = \underline{(\mathrm{i}\omega)^k},\ \ \forall k \geq 1$. □

Transformatele Fourier ale unor distribuţii sunt date în tabelul 8.2 :

Tabelul 8.2

| Nr. | $f(t)$ | $F[f]$ |
|---|---|---|
| 1 | $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$, $\omega_0 > 0$ | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ |
| 2 | $1$ | $2\pi\delta(\omega)$ |
| 3 | $\cos\omega_0 t$, $\omega_0 > 0$ | $\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ |
| 4 | $\sin\omega_0 t$, $\omega_0 > 0$ | $\mathrm{i}\pi[\delta(\omega + \omega_0) - (\omega - \omega_0)]$ |
| 5 | $\operatorname{sgn} t$ | $\dfrac{2}{\mathrm{i}\omega}$ |
| 6 | $h(t)$ | $\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}$ |
| 7 | $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}h(t)$, $\omega_0 > 0$ | $\pi\delta(\omega-\omega_0)+\dfrac{1}{\mathrm{i}(\omega - \omega_0)}$ |
| 8 | $h(t)\cos\omega_0 t$, $\omega_0 > 0$ | $\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\dfrac{\mathrm{i}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ |
| 9 | $h(t)\sin\omega_0 t$, $\omega_0 > 0$ | $\dfrac{\pi}{2\mathrm{i}}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\dfrac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ |
| 10 | $t^n$ | $2\pi\mathrm{i}^n\dfrac{d^n\delta(\omega)}{d\omega^n}$ |

# Capitolul 9

# Transformata Laplace

## 9.1 Definiţie şi formule de inversare

**Definiţia 9.1.** Se numeşte **funcţie original Laplace** orice funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cu următoarele proprietăţi:

a) $f(t) = 0$ pentru $t < 0$;

b) $f$ este derivabilă pe porţiuni pe intervalul $[0, \infty)$;

c) există constantele $M > 0$ şi $s_0 \geq 0$ astfel încât

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{s_0 t}, \forall t \geq 0. \tag{9.1}$$

Condiţia c) se numeşte **condiţia de creştere exponenţială** (cu $s_0$ **indicele de creştere al funcţiei** $f$).

**Exemplul 9.1.** Cea mai simplă funcţie original este funcţia unitate $u$ definită prin

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } t = 0 \\ 1, & \text{pentru } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

Funcţia unitate joacă un rol important în cele ce urmează datorită faptului că , dată fiind o funcţie $\varphi$ care îndeplineşte numai condiţiile b) şi c), prin înmulţirea cu $u$ devine o funcţie original, cu păstrarea valorilor sale pe $(0, \infty)$.

**Definiţia 9.2.** **Transformata Laplace** (sau **funcţia imagine**) a unei funcţii original $f$ este funcţia complexă $F\colon \{s_0 \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}p > s_0\} \to \mathbb{C}$:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt \tag{9.2}$$

adică

$$F(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ R \nearrow \infty}} \int_\varepsilon^R f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt \tag{9.3}$$

Se demonstrează că funcţia imagine $F$ este olomorfă (analitică) în semiplanul $\mathrm{Re}p > s_0$ şi vom nota $F = \mathcal{L}[f]$.

**Teorema 9.1.** *(**formula de inversare Mellin-Fourier**) Fie $f$ o funcţie original, $F = \mathcal{L}[f]$ şi $s_0$ indicele de creştere al funcţiei $f$, atunci are loc egalitatea*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}dp = f(t), \tag{9.4}$$

*cu $\alpha > s_0$ arbitrar, oricare $t \in (0,\infty)$ în care $f$ este continuă . In orice punct de discontinuitate al funcţiei $f$, valoarea funcţiei din membrul stâng este egală cu media limitelor laterale ale funcţiei $f$ în acel punct.*

*Demonstraţie.* Considerăm funcţia $\varphi$ definită pe $\mathbb{R}$ prin

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha t}[f(t-0) + f(t+0)], \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ \alpha > s_0. \tag{9.5}$$

Evident, $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)$, în orice punct $t$ în care $f$ este continuă . Această funcţie are următoarele proprietăţi evidente:

1) este derivabilă pe porţiuni;

2) are aceleaşi puncte de discontinuitate ca funcţia $f$ şi în orice punct $c$ de discontinuitate $\varphi(c) = \frac{1}{2}[\varphi(c-0) + \varphi(c+0)]$;

3) este absolut integrabilă pe $[0,\infty)$ şi fiind nulă pe $(-\infty, 0)$ este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$. Intr-adevăr, ţinând seama de (9.1), $|\varphi(t)| \le \mathrm{e}^{-\alpha t}M\mathrm{e}^{s_0 t} = M\mathrm{e}^{-(\alpha-s_0)t}$, $\forall t \in [0,\infty]$ cu $\alpha > s_0$, prin ipoteză . Funcţia $t \longrightarrow \mathrm{e}^{-(\alpha-s_0)t}$ fiind integrabilă pe $[0,\infty)$, $\varphi(t)$ este absolut integrabilă pe acest interval.

Funcţia $\varphi$ poate fi reprezentată printr-o integrală Fourier,

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \ \int_0^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(t-\tau)}d\tau.$$

Am putut înlocui în integrală $\varphi(\tau)$ cu $\mathrm{e}^{-\alpha\tau}f(\tau)$
in loc de $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}[t(\tau-0)+f(\tau+0)]$, deoarece integrala Riemann $\int_a^b g(\tau)d\tau$, pe un interval mărginit $[a,b]$, nu-şi schimbă valoarea dacă se modifică valorile funcţiei $g$ într-un număr finit de puncte din acest interval.

Din ultima egalitate rezultă

$$\mathrm{e}^{\alpha\tau}\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\sigma)t}d\sigma\int_0^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\sigma)\tau}d\tau.$$

Inlocuind $\alpha + \mathrm{i}\sigma = p$, integrala din stânga se transformă într-o integrală pe dreapta $s = \alpha$,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{pt}dp\int_0^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{p\tau}d\tau = \mathrm{e}^{\alpha t}\varphi(t)$$

sau, ţinând seama de (9.2) şi de (9.5),

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}dp = \frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)], \ \ \forall t \in (0,\infty). \tag{9.6}$$

□

Presupunem că transformata Laplace $F$ admite o prelungire în $\mathbb{C}$ cu excepţia unui număr finit de puncte singulare izolate $p_1, p_2, \dots p_n$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|p|\le n} |F(p)| = 0$.
Dacă sunt îndeplinite condiţiile în care relaţia (9.6) este adevărată, atunci:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}(F(p)\mathrm{e}^{pt}, p_k) \tag{9.7}$$

In particular, dacă $p_1, p_2, \dots$ sunt poli de ordin $n_1, n_2, \dots$ respectiv, atunci (9.7) devine:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}[F(p)(p-p_k)^{n_k}\mathrm{e}^{pt}] \tag{9.8}$$

In cazul particular, deosebit de frecvent în aplicaţii, al funcţiei $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, unde $A(p)$ şi $B(p)$ sunt polinoame cu coeficienţi reali, iar gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, formula (9.7) se mai scrie

$$f(t) = \sum_{k} \mathrm{Rez}\left(\frac{A(p)}{B(p)}\mathrm{e}^{pt}, p_k\right) + \sum_{k} 2\mathrm{ReRez}\left(\frac{A(p)}{B(p)}\mathrm{e}^{pt}, p_k\right) \tag{9.9}$$

Prima sumă din formula (9.9) se referă la toţi polii reali ai funcţiei $\frac{A(p)}{B(p)}$, cea de-a doua la toţi polii complecşi cu partea imginară pozitivă .

Când toţi polii funcţiei $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ sunt de ordinul unu formula (9.9) devine:

$$f(t) = \sum_{k} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\mathrm{e}^{p}k^{t} + \sum_{k} 2\mathrm{Re}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\mathrm{e}^{p}k^{t} \tag{9.10}$$

Tabelul 9.1

| Nr. | $f(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|---|
| 1 | h(t) | $\frac{1}{p}$ |
| 2 | $t^n$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 3 | $\mathrm{e}^{\omega t}$ | $\frac{1}{p-\omega}$ |
| 4 | $\sin \omega t$, $\omega > 0$ | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| 5 | $\cos \omega t$, $\omega > 0$ | $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| 6 | $sh\, \omega t$, $\omega > 0$ | $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ |
| 7 | $ch\, \omega t$, $\omega > 0$ | $\frac{p}{p^2-\omega^2}$ |
| 8 | $J_n(t)$, (funcţie Bessel) | $\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$ |
| 9 | $\frac{\sin t}{t}$ | arcctg$p$ |
| 10 | $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ | $\frac{1}{(p^2+1)^2}$ |

Funcţiile de la nr. 2-10 care apar în tabelul 9.1. sunt subînţelese a fi înmulţite cu $u(t)$, pentru că , în caz contrar, nu ar fi funcţii original; astfel, de exemplu, prin $t^n$ se înţelege $t^n u(t)$. Această convenţie va fi utilizată şi în continuare.

## 9.2 Proprietăţiile transformării Laplace

In continuare sunt date proprietăţiile transformării Laplace cu denumirile uzuale.

1. ***(liniaritatea)*** Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci:

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$$

*Demonstraţie.*

$$\mathcal{L}[\alpha f+\beta g](p)=\int_0^\infty[\alpha f(t)+\beta g(t)]\mathrm{e}^{-pt}dt=$$
$$=\int_0^\infty\alpha f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt+\int_0^\infty\beta g(t)\mathrm{e}^{-pt}dt=$$
$$=\alpha\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt+\beta\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt=$$
$$=\alpha\mathcal{L}[f](p)+\beta\mathcal{L}[g](p)$$

□

**Exemplul 9.2.** Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t)=3t^4-2t^3+4\mathrm{e}^{-3t}-2\sin 5t$.

*Demonstraţie.*

$$\mathcal{L}[f(t)](p)=3\mathcal{L}[t^4](p)-2\mathcal{L}[t^3](p)+4\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-3t}](p)-2\mathcal{L}[\sin 5t](p)=$$
$$=3\cdot\frac{4!}{p^5}-2\cdot\frac{3!}{p^4}+4\cdot\frac{1}{p+3}-2\cdot\frac{5}{p^2+25}$$

(conform linearităţii şi tabelului 9.1) □

2. ***(teorema asemănării)*** Dacă $a>0$ şi $F(p)=\mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}[f(at)](p)=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

*Demonstraţie.* Avem $\mathcal{L}[f(at)](p)=\int_0^\infty f(at)\mathrm{e}^{-pt}dt$. Cu schimbarea de variabilă $at=\tau$, obţinem

$$\mathcal{L}[f(at)](p)=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{p}{a}}d\tau=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

□

3. ***(teorema întârzierii)*** Dacă $\tau>0$ şi $F(p)=\mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)](p)=\mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$$

*Demonstraţie.* Cum $f(t)=0$, $\forall t<0$, rezultă că $f(t-\tau)=0$ pentru orice $t<\tau$. Avem

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)](p)=\int_0^\infty f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}dt=\int_\tau^\infty f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}dt.$$

Cu schimbarea de variabilă $t-\tau=\theta$, integrala devine

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)](p)=\int_0^\infty f(\theta)\mathrm{e}^{-p(\tau+\theta)}d\theta=\mathrm{e}^{-p\tau}\int_0^\infty f(\theta)\mathrm{e}^{-p\theta}d\theta=\mathrm{e}^{-p\tau}F(p).$$

□

4. ***(teorema deplasării)*** Dacă $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)](p) = F(p+\lambda)$$

*Demonstraţie.*

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)](p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(\lambda+p)t}dt = F(\lambda+p).$$

□

**Exemplul 9.3.** Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \mathrm{sh}2t \sin 5t$.

*Demonstraţie.* Scriem $f(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t}}{2} \sin 5t$

Atunci, conform liniarităţii şi teoremei deplasării avem:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t}\sin 5t](p) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-2t}\sin 5t](p) =$$
$$= \frac{1}{2}F(p-2) - \frac{1}{2}F(p+2) = \frac{1}{2}\frac{5}{(p-2)^2+25} - \frac{1}{2}\frac{5}{(p+2)^2+25},$$

unde $F(p) = \mathcal{L}[\sin 5t](p) = \frac{5}{p^2+25}$ □

5. ***(derivarea imaginii)*** Dacă $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F}{dp^n}$$

*Demonstraţie.* Demonstraţia se face prin inducţie. □

**Exemplul 9.4.** Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = (t-1)^2\mathrm{e}^{t-1}$.

*Demonstraţie.* Conform teoremei întârzierii avem $\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathrm{e}^{-p}F(p)$, unde

$$F(p) = \mathcal{L}[t^2\mathrm{e}^t](p) = \frac{2}{(p-1)^3},$$

conform teoremei derivării imaginii şi ţinând cont că $\mathcal{L}[\mathrm{e}^t](p) = \frac{1}{p-1}$.
□

6. ***(derivarea originalului)*** Dacă $f$ este o funcţie original şi presupunem că există $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ pe $(0,\infty)$, $f^{(n)}$ este o funcţie original şi $f^{(k)}(0+0) = \lim\limits_{t\to 0, t>0} f^{(k)}(t)$, $0 \le k \le n$, iar $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](p) = p^n F(p) - (p^{n-1} f(0+0) + p^{n-2} f'(0+0) + \ldots + f^{(n-1)}(0+0))$$

*Demonstraţie.* Avem $\mathcal{L}[f'(t)](p) = \int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$. Integrăm prin părţi $\mathcal{L}[f'(t)](p) = [f(t)\mathrm{e}^{-pt}]/_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$.

Tinând seama de (9.1), $|f(t)\mathrm{e}^{-pt}| = |f(t)|\mathrm{e}^{-st} \le M\mathrm{e}^{-(s-s_0)t}, s > s_0$, deci $\lim\limits_{t\to\infty}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}] = 0$. Atunci

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = pF(p) - f(0). \tag{9.11}$$

Inlocuim în (9.11) pe $f'$, succesiv cu $f'', f''', \ldots, f^{(n)}$,

$$\mathcal{L}[f''(t)](p) = p\mathcal{L}[f'(t)](p) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f'''(t)](p) = p\mathcal{L}[f''(t)](p) - f''(0)$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](p) - f^{(n-1)}(0)$$

Inmulţim egalitatea (9.11) cu $p^{n-1}$, prima egalitate din şirul de mai sus cu $p^{n-2}$, a doua cu $p^{n-3}$ etc. , ultima cu $p^0 = 1$. Prin adunare obţinem egalitatea din teoremă . □

7. ***(integrarea originalului)*** Dacă $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](p) = \frac{F(p)}{p}$$

*Demonstraţie.* Notăm $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Evident $g$ este funcţie original şi $g' = f$ aproape peste tot, deci $\mathcal{L}[g'(t)] = F(p)$. Adică

$$F(p) = \int_0^\infty g'(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = g(t)\mathrm{e}^{-pt}|_0^\infty + p\int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{-pt}dt =$$

$$= p\mathcal{L}[g(t)](p) - g(0+0) = p\mathcal{L}[g(t)](p),$$

deoarece $g(0+0) = 0$. □

**Exemplul 9.5.** Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \int_0^t \tau\mathrm{e}^{-\tau}d\tau$.

*Demonstraţie.* Conform teoremei integrării originalului avem $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(p)}{p}$, unde $F(p) = \mathcal{L}[te^{-t}] = (-1)F_1'(p)$(conform teoremei derivării imaginii), unde $F_1(p) = \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{p+1}$. Atunci $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$ şi rezultă $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p(p+1)^2}$. □

8. ***(integrarea imaginii)*** Dacă $\frac{f(t)}{t}$ este funcţie original, iar $F$ este transformata Laplace a funcţiei $f$, atunci

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^\infty F(v)dv$$

*Demonstraţie.* Fie $g(t) = \frac{f(t)}{t}, t > 0$, deci $f(t) = t \cdot g(t)$ şi conform teoremei derivării imaginii rezultă $F(p) = -G'(p)$, unde $G(p) = \mathcal{L}[g(t)](p)$. Dacă $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}](p) = H(p)$, atunci $H'(p) = F(p)$, deci $H+G = c$ constant. Dar $G(\infty) = 0$ şi $H(\infty) = 0$, deci $c = 0$ şi ca atare $H = G$, deci $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}](p) = G(p) = -H(p)$. □

**Exemplul 9.6.** Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \frac{\text{sh}\omega t}{t}$.

*Demonstraţie.* Conform teoremei integrării imaginii avem

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \int_p^\infty \frac{\omega}{q^2-\omega^2}dq = \omega\int_p^\infty \frac{1}{(q-\omega)(q+\omega)}dq =$$
$$= \omega\frac{1}{2\omega}\ln\frac{q-\omega}{q+\omega}/_p^\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{p-\omega}{p+\omega}$$

□

9. ***(teorema de convoluţie)*** Fie $h = f * g$ produsul de convoluţie al funcţiilor $f$ şi $g$, i.e. $h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ şi fie $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, $G(p) = \mathcal{L}[g(t)](p)$ transformatele Laplace ale funcţiilor original $f$ şi $g$, atunci

$$H(p) = F(p)G(p),$$

unde $H(p) = \mathcal{L}[h(t)](p)$.

*Demonstraţie.* Se poate verifica uşor că funcţia $h$ este funcţie original. Cum $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, adică $F(p) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$. Inmulţim în ambii membri cu $G(p)$, $F(p)G(p) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}G(p)d\tau$. Conform teoremei întârzierii, $e^{-p\tau}G(p) = \mathcal{L}[g(t-\tau)](p) = \int_0^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt$, deci $F(p)G(p) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt$. Se poate schimba ordinea

de interare şi rezultă $F(p)G(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}dt \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Cum $g$ este funcţie original, $g(t-\tau) = 0$ pentru $\tau > t$, deci

$$\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\tau f(\tau)g(t-\tau)d\tau = (f*g)(t).$$

Rezultă $F(p)G(p) = \int_0^\infty (f*g)(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$. □

**Exemplul 9.7.** Să se rezolve următoarea ecuaţie diferenţială

$$x'' - x = \mathrm{th}t, x(0) = 1, x'(0) = -1.$$

*Demonstraţie.* Fie $X(p) = \mathcal{L}[x(t)](p)$. Conform teoremei derivării originalului avem:

$\mathcal{L}[x''(t)](p) = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1.$

Ecuaţia devine:

$p^2X(p) + 1 - X(p) = \mathcal{L}[\mathrm{th}t](p) \Longrightarrow X(p)(p^2-1) + 1 = \mathcal{L}[\mathrm{th}t](p) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow X(p) = \frac{1}{p^2-1} \cdot \mathcal{L}[\mathrm{th}t](p) - \frac{1}{p^2-1}$ şi atunci, conform teoremei de convoluţie obţinem

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{sh}(t-\tau)\mathrm{th}\tau d\tau - \mathrm{sh}t$$

□

10. ***(formula lui Duhamel)*** Fie $f$ şi $g$ funcţii original cu $g$ derivabilă şi $g'$ funcţie original. Fie $F(p)$ şi $G(p)$ transformatele Laplace ale funcţiilor $f$ şi $g$. Atunci

$$\mathcal{L}\left[f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau\right](p) = pF(p)G(p)$$

*Demonstraţie.* Luăm $h = f*g$. Cum $h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ rezultă conform formulei de derivare a integralelor cu parametru,

$$h'(t) = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau.$$

Deoarece $h(0+0) = 0$, rezultă

$$\mathcal{L}[h'(t)](p) = p\mathcal{L}[h(t)](p) - h(0+0) = pF(p)G(p),$$

conform teoremei de derivare a originalului şi teoremei de convoluţie. Pe de altă parte, $\mathcal{L}[h'(t)](p) = \mathcal{L}\left[f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau\right](p)$, deci exact ceea ce trebuia demonstrat. □

**Exemplul 9.8.** Să se calculeze ecuaţia integrală

$$\sin t = t + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}(t-\tau)d\tau.$$

*Demonstraţie.* Din formula lui Duhamel avem

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}(t-\tau)d\tau\right] = pX(p)\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{X(p)}{p}.$$

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei integrale obţinem

$\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2} + \frac{X(p)}{p} \Longrightarrow X(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} \Longrightarrow x(t) = \cos t - 1$ □

**Exemplul 9.9.** Să se determine funcţia original a cărei imagine Laplace este $F(p) = \frac{2p^2+p+4}{p^4+p^3+2p^2-p+3}$.

*Demonstraţie.*

$$F(p) = \frac{1}{p^2-p+1} + \frac{1}{p^2+2p+3} = \frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{(p+1)^2+2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

(conform teoremei deplasării) □

**Exemplul 9.10.** Să se determine funcţia original a cărei imagine Laplace este $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

*Demonstraţie.*

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}[\cos 2t](p)\mathcal{L}[\sin t](p) = \mathcal{L}[\cos 2t * \sin t](p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(t) = \int_0^t \cos 2\tau \sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$$

(conform teoremei de convoluţie) □

**Exemplul 9.11.** Să se determine funcţia original a cărei imagine Laplace este $F(p) = \frac{3p-4}{p^2-p-6}$.

*Demonstraţie.* Vom folosi formula (9.7).

$p_1 = 3, p_2 = -2$ sunt poli simpli

Atunci $f(t) = \mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}, 3\right) + \mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}, -2\right)$.

Calculăm $\mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}, 3\right) = \lim\limits_{p\to 3}\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}(p-3) = \mathrm{e}^{3t}$.

Analog $\mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-4}, -2\right) = 2\mathrm{e}^{-2}$. Deci $f(t) = \mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{-2t}$. □

**Exemplul 9.12.** Să se rezolve ecuaţia integrodiferenţială

$$y'(t) = \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$$

cu condiţia $y(0) = 1$.

*Demonstraţie.* Conform teoremei derivării originalului avem

$$\mathcal{L}[y'(t)](p) = pY(p) - 1.$$

Membrul drept al ecuaţiei este produsul de convoluţie $y(t) * \cos t$; aplicând transformata Laplace ecuaţiei obţinem:

$$pY(p) - 1 = Y(p)\frac{p}{p^2+1}.$$

Atunci $Y(p) = \frac{p^2}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} \Longrightarrow y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$. □

**Exemplul 9.13.** Cu ajutorul transformatei Laplace să se determine soluţia ecuaţiei cu argumente întârziate

$$3y(t) - 4y(t-1) + y(t-2) = t, \text{ dacă } y = 0 \text{ pentru } t < 0.$$

*Demonstraţie.* Notăm $\mathcal{L}[y(t)](p) = Y(p)$

Conform teoremei întârzierii avem:

$$\mathcal{L}[y(t-1)] = \mathrm{e}^{-p}Y(p)$$
$$\mathcal{L}[y(t-2)] = \mathrm{e}^{-2p}Y(p)$$

După ce aplicăm transformata Laplace, ecuaţia devine:

$$(3 - 4\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p})Y(p) = \frac{1}{p^2} \Longrightarrow (1-\mathrm{e}^{p})(3-\mathrm{e}^{-p})Y(p) = \frac{1}{p^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow Y(p) = \frac{1}{2p^2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p}} - \frac{1}{3-\mathrm{e}^{-p}}\right) = \frac{1}{2p^2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{-p}}{3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2p^2}[1 + \mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p} + \ldots + \mathrm{e}^{-np} + \ldots - \frac{1}{3}(1 + \frac{\mathrm{e}^{-p}}{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{3^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{\mathrm{e}^{-np}}{3^n} + \ldots)] = \frac{1}{2p^2}[\frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\mathrm{e}^{-p} + \left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\mathrm{e}^{-2p} + \ldots +$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\mathrm{e}^{-np} + \ldots] = \frac{1}{3p^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\frac{\mathrm{e}^{-np}}{p^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y(t) = \frac{t}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(t-n)$$

(am folosit teorema întârzierii) □

# Capitolul 10

# Transformarea Z

**Definiţia 10.1.** Se numeşte **semnal discret** o funcţie $x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $n \to x_n$ (sau $x(n)$ sau $x[n]$). Mulţimea semnalelelor discrete se va nota cu $S_d$. Dacă $x_n = 0$ pentru orice $n < 0$, se spune că semnalul $x$ este cu **suport pozitiv**, iar mulţimea acestor semnale se notează cu $S_d^+$.

**Exemplul 10.1.** Se notează cu $\delta_k$, $k \in \mathbb{Z}$ fixat, semnalul definit prin:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = k \\ 0, & \text{dacă } n \neq k \end{cases}$$

şi numit **impulsul unitar discret la momentul** $k$ şi vom pune $\delta_0 = \delta$.

**Definiţia 10.2.** Dacă $x \in S_d$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ fixat, semnalul $y = (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ se numeşte **întârziatul** lui $x$ cu $k$ momente. Dacă $x, y \in S_d$ şi seria $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}y_k$ este convergentă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ cu suma $z_n$, atunci semnalul $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se numeşte **convoluţia** semnalelor $x$ şi $y$ şi se notează $z = x * y$.

Dacă $x, y \in S_d^+$, atunci $x * y$ există şi avem $x * y = y * x$, de asemenea:

$$x * \delta = x \text{ şi } (x * \delta_k)(n) = x(n-k)$$

Pentru orice funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi $T > 0$(pas de eşantionare) se poate obţine un semnal discret punând $x_n = f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$.

**Definiţia 10.3.** Fie $s \in S_d$, $s = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Se numeşte **transformata Z** (sau **transformata Laplace discreta**) a acestui semnal, funcţia complexă $L_s$ definită prin:

$$L_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$$

definită în domeniul de convergenţă al seriei Laurent respective.

Indicăm principalele proprietăţi ale transformării Z:

1. Există $R, r > 0$ astfel încât seria care defineşte transformarea Z converge în coroana $r < |z| < R$.

2. *(Liniaritatea)* Asocierea $s \to L_s$ este $\mathbb{C}$-liniară şi injectivă , aşadar:

$$L_{\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2}(z) = \alpha_1 L_{s_1}(z) + \alpha_2 L_{s_2}(z),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},\ s_1, s_2 \in S_d.$$

3. Dacă $s \in S_d^+$, $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci $\lim\limits_{z\to\infty} L_s(z) = a_0$, iar dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, atunci $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z-1}{z} L_s(z) = 1$.

4. *(Inversarea transformării Z)* Fie $s \in S_d^+$, $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi se presupune că funcţia $L_s(z)$ este olomorfă în domeniul $r < |z| < R$. Pentru orice $r < \rho < R$, fie $\gamma_\rho$ frontiera discului $|z| \le \rho$ parcursă în sens pozitiv o singură dată. Atunci avem:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} z^{n-1} L_s(z) dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

5. *(Teorema de convoluţie)* Dacă $s, t \in S_d^+$, atunci $s * t \in S_d^+$ şi avem:

$$L_{s*t} = L_s L_t$$

In particular,

$$L_{s*\delta_k}(z) = z^{-k} L_s(z), \quad k \in \mathbb{Z}$$

In tabelul 10.1 sunt date transformatele Z ale semnalelor uzuale.

Tabelul 10.1.

| Nr. | $s$ | $L_s$ |
|---|---|---|
| 1 | $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unde $h_n = 0$ pentru $n < 0$ şi $h_n = 1$ pentru $n \geq 0$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 2 | $\delta_k$, $k \in \mathbb{Z}$ | $\frac{1}{z^k}$ |
| 3 | $s = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| 4 | $s = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| 5 | $s = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| 6 | $s = (\mathrm{e}^{an})_{n\in\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{R}$ | $\frac{z}{z-\mathrm{e}^a}$ |
| 7 | $s = (\sin \omega n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$ |
| 8 | $s = (\cos \omega n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$ |

**Exemplul 10.2.** Să se arate că următorul semnal nu admite transformată Z :

$$x \in S_d^+, x_n = 2^{n^2} h(n).$$

*Demonstraţie.* Raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} z^{-n}$ este $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n^2}}} = 0$ , deci $D_x = \emptyset$. □

**Exemplul 10.3.** Să se determine semnalul $x \in S_d^+$ a cărui transformată Z este dată de $L_s(z) = \frac{z}{z^2+2az+2a^2}, a > 0$ dat.

*Demonstraţie.* $z_{1,2} = a(-1 \pm \mathrm{i})$ sunt poli simpli, pe care îi putem scrie şi astfel

$$z_1 = a(-1+\mathrm{i}) = a\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$z_2 = a(-1-\mathrm{i}) = a\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$$

Atunci $x_n = \sum_{i=1}^{2} \text{Rez}(\frac{z^n}{(z^2+2a+2a^2)}, z_i) = \frac{a^n(-1+\text{i})^n}{2z_1+2a} + \frac{a^n(-1-\text{i})^n}{2z_1+2a} =$
$= -\frac{\text{i}}{2a}(z_1^n - z_2^n)$. Deci $x_n = 2^{\frac{n}{2}} a^{n-1} \sin\frac{3n\pi}{4}$. □

**Exemplul 10.4.** Fie $x = (x_n)_{n\geq 0}$ din $S_d^+$ şi $y = (y_n)_{n\geq 0}$, unde $y_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Să se arate că $Y(z) = \frac{z}{z-1}X(z)$.

*Demonstraţie.* Fie $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_0 z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_1 z^{-n} + \ldots +$
$+ \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-1} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$

Dar $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-1} z^{-n} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \frac{1}{z}X(z)$ (deoarece $x_{-1} = 0$); $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n-2} z^{-n} = \frac{1}{z^2} z^{-n} = \frac{1}{z^2}X(z)$ etc. $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow Y(z) = X(z)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) = X(z) \cdot \frac{z}{z-1}$ □

**Exemplul 10.5.** Dacă $x, y \in S_d^+$ şi $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_n + x_{n+1}$, să se calculeze $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

*Demonstraţie.* Avem $y = x + x \star \delta_{-1} \Longrightarrow Y(z) = X(z) + X(z)z \Longrightarrow$
$\Longrightarrow H(z) = 1 + z$ □

**Exemplul 10.6.** Cu ajutorul transformării Z, să se rezolve în mulţimea semnalelor cu suport pozitiv ecuaţia $y * a = x$ în următorul caz

$$a = \delta_{-2} + \delta_{-1} - 6\delta, x_n = n \cdot h(n), n \in \mathbb{Z}$$

*Demonstraţie.* Deoarece $x \in S_d^+$, ecuaţia dată are soluţie $y \in S_d^+$ şi aceasta este unică . Intr-adevăr, ecuaţia de convoluţie se scrie

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = pF(p) - f(0).y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = n \cdot h(n), n \in \mathbb{Z}. \quad (10.1)$$

Cu $x, y \in S_d^+$, relaţia (10.1) este identic satisfăcută pentru $n \leq -3$, iar pentru $n = -2$ şi $n = -1$ ea furnizează valorile lui $y_0$, respectiv $y_1$: $y_0 = 0, y_1 = 0$. Pentru $n \geq 0$ relaţia de recurenţă (10.1) devine:

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = n, n \in \mathbb{Z},$$

cu soluţia unică $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de îndată ce $y_0$ şi $y_1$ sunt cunoscuţi.

Deoarece membrul drept al ecuaţiei de convoluţie este un semnal care admite transformată Z, aplicăm transformarea Z acestei ecuaţii, în ipoteza că şi semnalul $y \in S_d^+$ are transformată Z, $L_y(z)$.

Rezultă $L_y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$. Rezolvăm ca în exemplul 10.3:

$$\text{Rez}(z^{n-1}L_s(z), 1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2\frac{z^2}{(z-1)^2(z^2+z-6)}]' =$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{nz^{n-1}(z^2+z-6) - z^n(2z+1)}{(z^2+z-6)^2} = -\frac{4n+3}{16}.$$

Analog $\text{Rez}(z^{n-1}L_s(z), 2) = \frac{2^n}{5}$ şi $\text{Rez}(z^{n-1}L_s(z), -3) = -\frac{(-3)^n}{80}$.

Deci $y_n = -\frac{4n+3}{16} + \frac{2^n}{5} - \frac{(-3)^3}{80},\ n \in \mathbb{N}$.

Astfel am găsit un semnal $y \in S_d^+$ cu proprietatea că $L_{y*a}(z) = L_x(z)$.

Din injectivitatea aplicaţiei $L$ rezultă $y * a = x$ şi din unicitatea în $S_d^+$ a soluţiei ecuaţiei de convoluţie rezultă că semnalul găsit cu ajutorul transformării Z este cel căutat.

□

**Exemplul 10.7.** Cu ajutorul transformării Z, să se determine şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = (n+1)4^n, n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstraţie.* Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ca fiind resticţia unui semnal $x \in S_d^+$ la $\mathbb{N}$ şi transcriem informaţiile despre şirul dat sub forma unei ecuaţii de convoluţie $a * x = y$, pe care o rezolvăm în $S_d^+$ procedând ca la exemplul 10.6.

Avem $a * x = y, a = \delta_{-2} - 4\delta_{-1} + 3\delta, y_n = 0, n \le -2, y_{-1} = 1,$
$y_n = (n+1)4^n, n \in \mathbb{N}$.

Fie $s_1 = (n4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $s_2 = (4^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$L_{s_1}(z) = -zL'_{s_2}(z) = -z(\frac{z}{z-4})' = -z(-\frac{4}{(z-4)^2}) = \frac{4z}{(z-4)^2}$

Deci $L_x(z)(z^2-4z+3) = \frac{4z}{(z-4)^2} + \frac{z}{z-4} + z = \frac{z^2}{(z-4)^2} + z \Longrightarrow$
$\Longrightarrow L_x(z) = \frac{z(z^2-7z+16)}{(z-4)^2(z-1)(z-3)}$

Descompunem în fracţii simple şi găsim

$$x_n = \frac{1}{9}[18\cdot 3^n + (3n-13)4^n - 5], n \in \mathbb{N}.$$

□

**Exemplul 10.8.** Să se determine şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu

$$a_0 = 1, b_0 = 1 \text{ şi } a_{n-1} + 7a_n - b_n = 0,\ b_{n+1} + a_n + 5b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstraţie.*

$$a_{n-1} + 7a_n - b_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \ge 0 \text{ sau } n \le -2 \\ 1, & \text{dacă } n = -1 \end{cases}$$

$$b_{n+1} + a_n + 5b_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \geq 0 \text{ sau } n \leq -2 \\ 1, & \text{dacă } n = -1 \end{cases}$$

Atunci $a * \delta_{-1} + 7a * \delta - b * \delta = \delta_{-1}$ şi $b * \delta_{-1} + a * \delta + 5b * \delta = \delta_{-1}$.

Aşadar,

$$L_a(z)z + 7L_a(z) - L_b(z) = z$$

$$L_b(z)z + L_a(z) + 5L_b(z) = z$$

Rezultă $L_a(z) = \frac{z}{z+6}, L_b(z) = \frac{z}{z+6} \Longrightarrow a_n = b_n = (-6)^n$. □

# Capitolul 11

# Funcţii speciale

## 11.1 Polinoame ortogonale

### 11.1.1 Funcţii şi polinoame ortogonale

Considerăm spaţiul liniar $E$ al funcţiilor reale de variabilă reală care pe intervalul $[a, b]$, finit sau infint, sunt netede sau netede pe porţiuni şi au numai puncte de discontinuitate se speţa întâi. **Produsul scalar** al elementelor $f$ şi $g$ este numărul real

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx, \;\; \rho(x) > 0 \;\text{ pondere.}$$

Funcţiile $f$ şi $g$ se numesc **ortogonale** dacă $(f, g) = 0$.

Expresia $\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx$ este pătratul normei lui $f$.

Prin distanţa $d(f, g)$ dintre $f$ şi $g$ înţelegem

$$d(f, g) = \|f - g\| = \int_a^b \rho(x)[f(x) - g(x)]^2 dx.$$

Numărul $d(f, g)$ se numeşte uneori **abaterea pătratică medie** a funcţiilor $f$ şi $g$ pe $[a, b]$. Convergenţa (în normă ) a şirului de funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ din $E$ către funcţia $f$, o vom numi **convergenţa în medie**. Spunem că şirul $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ din $E$ converge în medie către $f$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ arbitrar dat, există $N(\varepsilon)$ astfel încât să avem $\int_a^b \rho(x)[f_n(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Presupunem că în spaţiul $E$ orice şir fundamental are o limită aparţinând tot lui $E$, spaţiul liniar astfel organizat fiind deci complet.

Sistemul de funcţii $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ din $E$ se numeşte **ortonormat** dacă funcţiile sistemului sunt ortogonale două câte două , iar fiecare din ele are norma 1, i.e.

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 0, & \text{când } m \neq n \\ 1, & \text{când } m = n \end{cases}$$

Un asemenea sistem este închis în raport cu mulţimea funcţiilor din $E$, dacă nu există în $E$ niciun element nenul care să fie ortogonal cu toate elementele sistemului. Se poate arăta că un sistem ortonormat închis al spaţiului $E$ formează o bază în sensul că pentru fiecare element $f \in E$ există dezvoltarea (Fourier generalizată ) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(x)$ convergentă în medie către $f(x)$. Coeficienţii Fourier generalizaţi $c_k$ se calculează cu formula

$$c_k = (f, e_k) = \int_a^b \rho(x) f(x) e_k(x) dx,$$

ei fiind legaţi de funcţia $f$ prin formula lui Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

Sirul puterilor $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ stă la baza câtorva sisteme ortogonale particulare, polinoame ortogonale, pe care le vom studia în continuare. Ele se obţin ortogonalizând şirul anterior în situaţii particulare convenabile pentru $a, b, \rho(x)$. De exemplu,

pentru $a = -1, b = 1, \rho(x) = 1$, obţinem polinoamele lui Legendre;
pentru $a = -1, b = 1, \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, polinoamele lui Cebîşev;
pentru $a = 0, b = \infty, \rho(x) = \mathrm{e}^{-x}$, polinoamele lui Laguerre,
pentru $a = -\infty, b = \infty, \rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, polinoamele lui Hermite.

Noţiunile introduse se extind şi asupra spaţiului funcţional $\mathcal{E}$ alcătuit din funcţii complexe de parametru real $t \in [a, b]$. Definim produsul scalar al elementelor $f$ şi $g$ ca fiind numărul complex

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt,$$

unde $\overline{g(t)}$ înseamnă conjugata lui $g(t)$. De aici

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt > 0.$$

### 11.1.2 Polinoamele lui Legendre

In teoria potenţialului se întâlneşte funcţia $g\colon [0,1)\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(r, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}}. \tag{11.1}$$

Se pune problema dezvoltării funcţiei $g$ în serie de puteri ale lui $r$ pentru $r < 1$. In prealabil, observăm că $x \in [-1, 1]$ implică existenţa unui unghi

$\alpha \in [0,\pi]$ astfel încât $x = \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$, deci

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-re^{i\alpha}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-re^{-i\alpha}}}.$$

Deoarece $|re^{i\alpha}| = |re^{-i\alpha}| = r$, $\forall\alpha \in [0,\pi]$, fiecare dintre aceşti doi factori poate fi dezvoltat în serie binomială , serie de puteri ale lui $r$, pentru $r \in [0,1)$ cu $x \in [-1,1]$ arbitrar. Obţinem astfel o serie de forma

$$g(r,x) = \sum_{n\geq 0} P_n(x)r^n, \;\; r \in [0,1), \;\; x \in [-1,1]. \tag{11.2}$$

Vom obţine coeficienţii $P_n(x)$ pe o cale indirectă . Notăm $u = r(2x-r)$ şi $g(r,x) = (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}$ devine $(1-u)^{-\frac{1}{2}}$. Pentru $|u|<1$ avem

$$(1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}u^n.$$

Inlocuim $u$ cu $r(2x-r)$ şi strângem termenii în $r^n$. Ultimul termen care conţine pe $r^n$ este $u^n$. Un termen $u^{n-k}$ va conţine pe $r^n$ dacă şi numai dacă $2k \leq n$. Contribuţia sa este $(-1)^k C_{n-k}^k (2x)^{n-2k} r^n$, deci

$$P_n(x) = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k C_{n-k}^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^k(n-k)!}x^{n-2k}, \;\; k \in \mathbb{N} \tag{11.3}$$

Coeficienţii dezvoltării în seria (11.2) sunt polinoame care conţin numai puteri pare sau impare, după cum $n$ este număr par sau impar.

**Definiţia 11.1.** Polinoamele $P_n$ definite prin (11.3) se numesc **polinoamele lui Legendre**, iar funcţia $g$ definită prin (11.1), a cărei dezvoltare în serie (11.2) are coeficienţii $P_n(x)$, se numeşte **funcţia generatoare**a polinoamelor Legendre.

**Teorema 11.1.** *Polinoamele lui Legendre mai pot fi exprimate prin* ***formula lui Olinde-Rodrigues***

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{11.4}$$

*Demonstraţie.* Din egalitatea $(x^2-1)^n = \sum_{0\leq k\leq n}(-1)^k C_n^k x^{2n-2k}$ deducem

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}}(-1)^k C_n^k (2n-2k)(2n-2k-1)\ldots(n-2k+1)x^{2n-2k}.$$

Coeficientul lui $x^{n-2k}$ se mai poate scrie, abstracţie făcând de semn,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} = n!C_{n-k}^k\frac{(2n-2k)!}{[(n-k)!]^2} = n!C_{n-k}^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)2^{n-k}}{(n-k)!},$$

deci

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = n!2^n \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} (-1)^k C_{n-k}^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-2k-1)}{(n-k)!2^k} x^{n-2k}$$

Comparând cu (11.3) rezultă (11.4). □

**Teorema 11.2.** *Polinoamele lui Legendre au toate rădăcinile reale, distincte şi cuprinse în intervalul (-1,1).*

*Demonstraţie.* Ecuaţia $(x^2-1)^n = 0$ are rădăcinile -1 şi 1, multiple de ordinul $n$. Conform teoremei lui Rolle, ecuaţia $\frac{d}{dx}(x^2-1)^n = 0$ are, în afară de rădăcinile -1,1, multiple de ordinul $n-1$, o rădăcină în intervalul (-1,1). Aplicând din nou teorema lui Rolle, rezultă că ecuaţia $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n = 0$ admite două rădăcini distincte în intervalul (-1,1), celelalte rădăcini fiind -1,1, multiple de ordinul $n-2$ etc. Ecuaţia $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = 0$ echivalentă cu ecuaţia $P_n(x) = 0$ are toate cele $n$ rădăcini reale, distincte şi situate în intervalul (-1,1). □

**Teorema 11.3.** *Intre polinoamele lui Legendre există relaţia de recurenţă*

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11.5}$$

*Demonstraţie.* Egalitatea (11.2), scrisă sub forma

$$(1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n\ge 0} P_n(x) r^n,$$

o derivăm în raport cu $r$. Obţinem

$$(1-2rx+r^2)^{-\frac{3}{2}}(x-r)\sum_{n\ge 1} nP_n(x)r^{n-1}$$

sau echivalent

$$(x-r)\sum_{n\ge 0} P_n(x)r^n = (1-2rx+r^2)\sum_{n\ge 1} nP_n(x)r^{n-1}.$$

Identificând coeficienţii lui $r^n$, rezultă

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

egalitate echivalentă cu (11.5). □

**Teorema 11.4.** *Polinomul lui Legendre $P_n$, $n \in \mathbb{N}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale*

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \tag{11.6}$$

*Demonstraţie.* Derivăm relaţia evidentă $(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n = 2nx(x^2-1)^n$ de $n+1$ ori, folosind formula lui Leibniz,

$$(x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^n + 2(n+1)x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n + n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n =$$

$$= 2nx\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n + 2n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Impărţim ambii membri cu $n!2^n$ şi ţinem seama de (11.4). Obţinem

$$(x^2-1)P_n''(x)+2(n+1)xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x) = 2nxP_n'(x)+2n(n+1)P_n(x)$$

sau

$$(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Deci $P_n$ este soluţie a ecuaţiei (11.6). □

**Teorema 11.5.** *Polinoamele lui Legendre formează un sistem de funcţii ortogonale pe intervalul [-1,1]. Mai mult,*

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{pentru } k = n \end{cases}$$

*Demonstraţie.* $P_n$ şi $P_k$ sunt soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale de forma (11.6), pe care o scriem sub forma echivalentă $\frac{d}{dx}((x^2-1)y') = n(n+1)y$. Deci

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)P_n'(x)] = n(n+1)P_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)P_k'(x)] = k(k+1)P_k(x)$$

Inmulţim în prima egalitate cu $P_k(x)$, în a doua cu $P_n(x)$ şi apoi le scădem. Obţinem

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)(P_k(x)P_n'(x) - P_k'(x)P_n(x))] = (n(n+1) - k(k+1))P_n(x)P_k(x)$$

De aici rezultă

$$(n(n+1) - k(k+1))\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx = 0,$$

care pentru $k \neq n$ se reduce la $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx = 0$. Deci, polinoamele $P_n$ formează un sistem de funcţii ortogonale pe intervalul [-1,1].

Pentru a verifica egalitatea din enunţ în cazul când $k = n$, vom scrie pe lângă relaţia de recurenţă (11.5) şi relaţia obţinută din aceasta înlocuind $n$ cu $n-1$. Avem

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0, n = 2, 3, \ldots$$

Inmulţim în prima relaţie cu $P_{n-1}(x)$, în două cu $P_n(x)$ şi integrăm pe intervalul [-1,1]. Datorită proprietăţii de ortogonalitate, rezultă

$$n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = (2n-1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx, n = 2, 3, \ldots$$

Din compararea acestor două egalităţi, deducem

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx, n = 2, 3\ldots$$

Notăm $I_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$ şi avem $I_2 = \frac{3}{5}I_1, I_3 = \frac{5}{7}I_2, I_4 = \frac{7}{9}I_3, \ldots, I_n = \frac{2n-1}{2n+1}I_{n-1}$.

De aici rezultă $I_n = \frac{3}{2n+1}I_1$.

Din (11.4) deducem $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ şi avem $\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx = 2, \int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2(x)dx = \frac{2}{3}$, deci egalitatea din enunţ este verificată pentru $k = n = 0$ şi pentru $k = n = 1$. Pentru $k = n \geq 2$ avem

$$I_n = \frac{3}{2n+1}I_1 = \frac{3}{2n+1}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{2n+1}.$$

□

**Exemplul 11.1.** Să se calculeze integrala

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n'(x)]^2dx.$$

*Demonstraţie.* Integrăm prin părţi şi ţinem seama de Teorema 11.4. Avem

$$I = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_n'(x)dx = (1-x^2)P_n'(x)P_n(x)|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]dx = n(n+1)\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

(conform Teoremei 11.5) □

**Exemplul 11.2.** In relaţia (11.2) luăm $x = \cos\theta$ şi $r = e^{i\varphi}$. Să se obţină pentru $0 \leq \varphi < \theta < \pi$ dezvoltările

$$P_n(\cos\theta)\cos n\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}$$

$$P_n(\cos\theta)\sin n\varphi = -\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}$$

din care să se deducă suma seriei $\sum_{n\geq 0} P_n(\cos\theta)$.

*Demonstraţie.* Tinând seama că $e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=2\cos\varphi$ putem scrie

$$\sqrt{1-2xr+r^2}=\sqrt{1-2e^{i\varphi}\cos\theta+e^{2i\varphi}}=e^{i\frac{\varphi}{2}}\sqrt{e^{-i\varphi}-2\cos\theta+e^{i\varphi}}=$$

$$=e^{i\frac{\varphi}{2}}\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}$$

Atunci conform relaţiei (11.2) şi notaţiilor din enunţul problemei,

$$\frac{e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}=\sum_{n\geq 0}P_n(\cos\theta)e^{in\varphi}.$$

Identificând părţile reale şi imaginare ale celor doi membri obţinem

$$P_n(\cos\theta)\cos n\varphi=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}$$

$$P_n(\cos\theta)\sin n\varphi=-\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}$$

In prima dezvoltare luăm $\varphi=0$ şi obţinem

$$\sum_{n\geq 0}P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

□

**Exemplul 11.3.** Să se deducă formulele de recurenţă

a) $P_n(x)=P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)-2xP'_n(x)$

b) $(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)$

c) $P'_{n+1}(x)=(n+1)P_n(x)+xP'_n(x)$

d) $(1-x^2)P'_n(x)=nP'_{n-1}(x)-nxP_n(x)$

*Demonstraţie.* a) Derivăm relaţia (11.2) în raport cu $x$ şi înmulţim egalitatea obţinută cu $1-2xr+r^2$ :

$$\frac{r}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=(1-2xr+r^2)\sum_{n\geq 0}P'_n(x)r^n.$$

Relaţia se mai poate scrie

$$r\sum_{n\geq 0}P_n(x)r^n = (1-2xr+r^2)\sum_{n\geq 0}P_n'(x)r^n.$$

Identificând coeficienţii lui $r^{n+1}$ din ambii membri obţinem a).

b) Derivăm formula (11.5) şi eliminăm termenul $xP_n(x)$ din acesta şi din formula a).

c) Derivăm relaţia (11.5) şi eliminăm $P_{n-1}'(x)$ din aceasta şi din formula a).

d) Din c) avem $P_{n+1}'(x) = (n+1)P_n(x)+xP_n'(x)$ şi $P_n'(x) = (n)P_{n-1}(x)+xP_{n-1}'(x)$. Cu acestea formăm expresia $xP_{n+1}'(x) - xP_{n-1}'(x)$ şi o egalăm cu cea pe care o obţinem din b). □

**Exemplul 11.4.** Să se arate că funcţia generatoare $g$ dată de (11.1) satisface ecuaţia $r\frac{\partial g}{\partial r} = (x-r)\frac{\partial g}{\partial x}$ obţinând cu ajutorul acesteia relaţia de recurenţă

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x). \tag{11.7}$$

*Demonstraţie.* Ecuaţia diferenţială din enunţ se verifică prin calcul direct. Folosind (11.2) scriem ecuaţia diferenţială sub forma

$$(x-r)\sum_{n\geq 1}P_n'(x)r^n = r\sum_{n\geq 1}nP_n(x)r^{n-1}$$

şi identificând coeficienţii lui $r^n$ din ambii membri obţinem relaţia de recurenţă $xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$. Calculăm

$$P_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi n(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n-1}\left(1+\frac{x\cos\varphi}{\sqrt{x^2-1}}\right)d\varphi$$

şi amplificăm ambii membri cu $x^2-1$ grupând convenabil termenii din dreapta. Obţinem

$$(x^2-1)P_n'(x) = nx\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi - n\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n-1}d\varphi$$

sau

$$(1-x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \tag{11.8}$$

(vezi Exemplul 11.3 d)). □

### 11.1.3 Polinoamele lui Cebîşev

Din formula lui Moivre

$$\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$$

rezultă

$$\cos n\theta = \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta.$$

Cu notaţia $x = \cos\theta$, egalitatea devine

$$\cos(n \arccos x) = \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k$$

**Definiţia 11.2.** Polinoamele $T_n$ definite prin

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N} \tag{11.9}$$

se numesc **polinoamele lui Cebîşev**.

**Teorema 11.6.** *Polinoamele lui Cebîşev au următoarele proprietăţi :*

1. *admit funcţia generatoare* $\tau(\zeta, x) = \frac{1-x\zeta}{1-2x\zeta+\zeta^2}$, *adică*

$$\tau(\zeta, x) = \sum_{n\ge 0} T_n(x)\zeta^n, \quad |\zeta| < 1$$

2. *există relaţia de recurenţă*

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. *polinomul* $T_n$ *este soluţie a ecuaţiei diferenţiale*

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

4. *există relaţiile*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x)T_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k \ne n \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pentru } k = n \ne 0 \\ \pi, & \text{pentru } k = n = 0 \end{cases}$$

*Demonstraţie.* 1. Considerăm seria Taylor $\sum_{n\ge 0} T_n(x)\zeta^n$ în care înlocuim $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ prin $\cos n\theta$. Avem

$$\sum_{n\ge 0} T_n(x)\zeta^n = \sum_{n\ge 0} \cos n\theta \zeta^n = \frac{1}{2}\sum_{n\ge 0} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta})\zeta^n.$$

Pentru orice $\forall \zeta \in \mathbb{C}$ cu $|\zeta| < 1$, seria este convergentă , deoarece este suma a două serii geometrice cu raţiile $|\zeta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = |\zeta| < 1$, $|\zeta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}| = |\zeta| < 1$. Rezultă

$$\sum_{n\ge 0} \cos n\theta \zeta^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\zeta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{1}{1-\zeta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1-\zeta\cos\theta}{1-2\zeta\cos\theta+\zeta^2}.$$

Revenind la variabila $x$, obţinem

$$\sum_{n\geq 0} T_n(x)\zeta^n = \frac{1-\zeta x}{1-2\zeta x+\zeta^2},\ \ |\zeta|<1.$$

2. Din identitatea

$$\cos(n+1)\theta - 2\cos\theta\cos n\theta + \cos(n-1)\theta = 0,$$

înlocuind $\theta = \arccos x$, se obţine relaţia de recurenţă din enunţ .

3. Deoarece $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$, avem

$$\sqrt{1-x^2}T_n'(x) = n\sin(n\arccos x),$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}T_n'(x) + \sqrt{1-x^2}T_n''(x) = -\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arccos x).$$

Inmulţind cu $\sqrt{1-x^2}$ şi înlocuind $\cos(n\arccos x)$ cu $T_n(x)$, rezultă

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

4. In integrala din membrul stâng, pe care o vom nota cu $I(n,k)$, facem substituţia $x = \cos\theta$,

$$I(n,k) = \int_0^\pi \cos k\theta\cos n\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(k+n)\theta + \cos(k-n)\theta]d\theta.$$

Pentru $k\neq n$, $I(n,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+n)\theta}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\theta}{k-n}\right]|_0^\pi = 0$.
Pentru $k = n \neq 0$, $I(n,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2n\theta}{2n} + \theta\right]|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.
Pentru $k = n = 0$, $I(0,0) = \int_0^\pi d\theta = \pi$. □

**Observaţia 11.1.** Polinoamele lui Cebîşev formează un sistem ortogonal cu ponderea $p$, pe intervalul [-1,1], unde $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ \forall x\in(-1,1)$.

### 11.1.4 Polinoamele lui Hermite

Considerăm funcţia $\varphi\colon \mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definită prin

$$\varphi(\zeta,x) = \mathrm{e}^{-(\zeta^2+2\zeta x)} = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-(\zeta+x)^2} \tag{11.10}$$

Această funcţie este olomorfă pe $\mathbb{C}$, în raport cu $\zeta$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci admite dezvoltarea în serie Taylor

$$\varphi(\zeta,x) = \sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{\zeta^n}{n!}, \tag{11.11}$$

unde $H_n(x)$ este derivata de ordinul $n$ în punctul $\zeta = 0$ a funcţiei $\zeta \longmapsto \mathrm{e}^{-(\zeta+x)^2}$, înmulţită cu $\mathrm{e}^{x^2}$,

$$H_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\mathrm{e}^{-x^2}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11.12}$$

$H_n$ este un polinom de gradul $n$.

**Definiţia 11.3.** Polinoamele $H_n$ definite prin (11.12) se numesc **polinoamele lui Hermite**, iar funcţia $\varphi$ definită de (11.10) se numeşte **funcţia generatoare** a polinoamelor lui Hermite.

**Teorema 11.7.** *Polinoamele lui Hermite au următoarele proprietăţi:*

1. *verifică relaţia de recurenţă :*

$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. *$H_n$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale :*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

3. *au loc relaţiile :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_k(x)H_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k \neq n \\ n!2^n\sqrt{\pi}, & \text{pentru } k = n \end{cases}$$

## 11.2 Funcţiile lui Bessel

### 11.2.1 Ecuaţia lui Bessel. Funcţiile lui Bessel de prima speţă şi de speţa a doua

**Definiţia 11.4.** Ecuaţia diferenţială

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{11.13}$$

unde $\nu$ este un parametru cu valori reale sau complexe, se numeşte **ecuaţia lui Bessel**, iar soluţiile acestei ecuaţii se numesc **funcţii Bessel** sau **funcţii cilindrice**.

**Observaţia 11.2.** Denumirea de funcţii cilindrice este justificată prin faptul că se întâlnesc în probleme la limită din teoria potenţialului pentru domenii cilindrice.

**Observaţia 11.3.** Ecuaţia lui Bessel poate apărea sub diverse forme, iar forma (11.13) se numeşte **forma canonică** . Cea mai apropiată de forma (11.13) este ecuaţia

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{11.14}$$

care poate fi adusă la forma canonică prin schimbarea de variabilă $\xi = kx$.

O familie de ecuaţii care pot fi aduse la forma (11.13) este

$$x^2y'' + axy' + (bx^n + c)y = 0$$

cu $a, b, c, n$ constante reale sau complexe. Pentru a ajunge la forma canonică se face mai întâi schimbarea de variabilă $x = t^{\frac{2}{n}}$ şi apoi $y = t^{\alpha}z$, unde $\alpha$ urmează să fie determinat astfel încât să se obţină o ecuaţie de forma (11.14).

Vom considera ecuaţia (11.13) pentru funcţii complexe de o variabilă complexă şi căutăm soluţii de forma

$$y(x) = x^r \sum_{k\geq 0} c_k x^k, \;\; x \in \mathbb{C} \tag{11.15}$$

exponentul $r$ şi constantele $c_k$ urmând a fi determinate. Presupunem că seria $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ are raza de convergenţă $\rho \neq 0$. Pentru orice $x$ interior discului de convergenţă ,

$$y'(x) = x^{r-1} \sum_{k\geq 0} (r+k) c_k x^k$$

$$y''(x) = x^{r-2} \sum_{k\geq 0} (r+k)(r+k-1) c_k x^k$$

Introducem în ecuaţia (11.13) şi simplificăm cu $x^r$. Obţinem

$$\sum_{k\geq 0} [(r+k)(r+k-1) + (r+k)] c_k x^k + (x^2 - \nu^2) \sum_{k\geq 0} c_k x^k = 0$$

sau echivalent

$$\sum_{k\geq 0} [(r+k)^2 - \nu^2] c_k x^k = -\sum_{k\geq 0} c_k x^{k+2}.$$

Rezultă

$$(r^2 - \nu^2)c_0 = 0, \;\; [(r+1)^2 - \nu^2]c_1 = 0 \tag{11.16}$$

$$[(r+k)^2 - \nu^2]c_k = -c_{k-2}, \;\; k = 2, 3, 4 \ldots \tag{11.17}$$

Putem presupune $c_0 \neq 0$. Dacă $c_0 = 0$, seria (11.15) va începe cu termenul $c_1 x^{r+1}$ şi cu schimbarea de notaţie $r + 1 = r_1, k = p + 1$ am avea $y = x^{r_1} \sum_{p\geq 0} c_p x^p$, adică o serie de aceeaşi formă cu (11.15). Din prima egalitate (11.16) rezultă

$$r^2 - \nu^2 = 0. \tag{11.18}$$

Această ecuaţie, numită **ecuaţia determinată** a ecuaţiei diferenţiale (11.13), are rădăcinile $\nu$ şi $-\nu$. Cum $\nu$ intervine în ecuaţia diferenţială prin pătratul său, $\forall \nu^2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\arg_0(\nu^2) \in [0, 2\pi)$ şi putem preciza pe $\nu \neq 0$ prin $\arg_0(\nu) \in [0, \pi)$. Deci, dacă $\nu \in \mathbb{R}$, atunci $\nu \geq 0$.

Pentru $r = \nu$, a doua relaţie (11.16) devine $(2\nu + 1)c_1 = 0$. Deoarece $\nu$ nu poate lua valori strict negative, $2\nu + 1 \neq 0$ şi $c_1 = 0$. Tot pentru $r = \nu$, relaţiile (11.17) devin

$$k(2\nu + k)c_k = -c_{k-2}, \;\; k = 2, 3, \ldots \tag{11.19}$$

Pentru $k = 3, 5, \ldots$, ţinând seama că $c_1 = 0$, rezultă că toţi coeficienţii $c_k$ de indice impar sunt nuli. Pentru $k = 2, 4, \ldots$ notăm $k = 2p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ şi obţinem din (11.19)

$$4p(\nu + p)c_{2p} = -c_{2p-2}, \;\; p = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.20}$$

din care se pot deduce toţi coeficienţii cu indice par în funcţie de $c_0$. Din primele $p$ relaţii

$$(\nu + 1)c_2 = -c_0$$

$$(\nu + 2)c_4 = -c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\nu + p)c_{2p} = -c_{2p-2}$$

rezultă

$$p!2^{2p}(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + p)c_{2p} = (-1)^p c_0$$

Tinând seama de proprietăţile funcţiei $\Gamma$ a lui Euler, avem

$$(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + p) = \frac{\Gamma(\nu + p + 1)}{\Gamma(\nu + 1)}.$$

Rezultă

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p \Gamma(\nu + 1)c_0}{p!2^{2p}\Gamma(\nu + p + 1)}, \;\; p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Astfel (11.15) devine

$$y(x) = x^\nu \sum_{p\geq 0} c_{2p}x^{2p} = \Gamma(\nu + 1)c_0 \sum_{p\geq 0} (-1)^p \frac{x^{\nu+2p}}{p!2^{2p}\Gamma(\nu + p + 1)}.$$

Ecuaţia (11.13) fiind omogenă , soluţiile sale pot fi determinate în afara unui factor constant. Vom lua $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ şi obţinem funcţia

$$y(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2p}$$

Vom determina multţimea pe care suma acestei serii există şi este soluţie a ecuaţiei diferenţiale. Vom scrie

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

In această serie notăm $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \zeta$ şi avem de studiat seria de puteri $\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)}\zeta^p$.

Raza de convergenţă a acestei serii este

$$\rho = \lim_{p\to\infty}\left|\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)}\cdot\frac{(p+1)!\Gamma(\nu+p+2)}{(-1)^{p+1}}\right| = \lim_{p\to\infty}(p+1)|\nu+p+1| = \infty$$

Fie funcţia $\varphi$ definită prin

$$\varphi(\zeta) = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)}\zeta^p,\ \ \zeta\in\mathbb{C}.$$

Seria $\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)}\zeta^p$ poate fi derivată de câte ori este necesar; la fel şi seria $\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = f(x)$ a cărei sumă este $f$.

Funcţia $y$ obţinută mai sus are valorile $y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu f(x)$.

Pentru $\nu = n\in\mathbb{N}$, primul factor, $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ defineşte o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$, deci $y$ este o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi verifică ecuaţia lui Bessel pe $\mathbb{C}$.

Dacă $\nu$ nu este număr natural, $\nu$ este sau un număr strict pozitiv diferit de un întreg sau un număr complex cu partea imaginară strict pozitivă , deci $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ ia mai multe valori pentru $x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ dat.

Fie $T$ o semidreaptă cu originea în $O$, $T = \{x = re^{i\alpha}|r\geq 0\}$ cu $\alpha\in[0,2\pi)$ constant. Considerăm ramura corespondenţei $x\longrightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ definită pe $D = \mathbb{C}\setminus T$ cu valorile $e^{\nu(\ln|\frac{x}{2}|+i\arg_\alpha(\frac{x}{2}))}$. Pentru a evita complicaţiile de scriere vom nota aceste valori tot cu $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$. Funcţia $x\longmapsto\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ este olomorfă pe $D = \mathbb{C}\setminus T$, deci $x\longmapsto y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu f(x)$ este olomorfă pe $D$ şi verifică ecuaţia (11.13) pe $D$.

**Definiţia 11.5.** Funcţia $J_\nu$ definită prin

$$J_\nu(x) = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2p} \tag{11.21}$$

este soluţie a ecuaţiei lui Bessel (11.13).

In continuare vom încerca să obţinem o a doua soluţie particulară a ecuaţiei (11.13) corespunzătoare lui $r = -\nu$, $-\nu$ fiind cealaltă soluţie a ecuaţiei determinate, în ipoteza $\nu\neq 0$.

A doua relaţie (11.16) devine $(-2\nu+1)c_1 = 0$, iar relaţiile (11.17) vor avea forma $k(-2\nu+k)c_k = -c_{k-2},\ \ k = 2,3,\ldots$. Vom scrie aceste relaţii separat, pentru $k$ par şi pentru $k$ impar.

$$(-\nu+1)c_2 = -c_0,\ \ (-2\nu+1)c_1 = 0$$

$$(-\nu+2)c_4 = -c_2,\ \ 3(-2\nu+3)c_3 = -c_1$$

. . . . . .

$$(-\nu+p)c_{2p} = -c_{2p-2},\ \ (2p+1)(-2\nu+2p+1)c_{2p+1} = -c_{2p-1}$$

**Cazul 1.** $\nu$ nu este număr natural. Avem $-\nu+p \neq 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ şi din primele $p$ relaţii de mai sus rezultă

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p \Gamma(-\nu+1)c_0}{p!2^{2p}\Gamma(-\nu+p+1)},\ \ p = 1,2,3,\ldots$$

Relaţiile de pe a doua coloană pot fi satisfăcute luând $c_{2p+1} = 0,\ \ p = 0,1,2,\ldots$ şi seria (11.15) devine

$$y(x) = x^\nu \sum_{p\geq 0} c_{2p}x^{2p}.$$

Luând $c_0 = \frac{2^\nu}{\Gamma(-\nu+1)}$, obţinem funcţia $J_{-\nu}$ care poate fi dedusă din (11.21) înlocuind $\nu$ cu $-\nu$,

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(-\nu+p+1))} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2p} \tag{11.22}$$

cu convenţia de mai sus, $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \mathrm{e}^{\nu\left(\ln\left|\frac{x}{2}\right| + i\arg_\alpha\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$. Funcţia $J_{-\nu}$ este olomorfă pe $D = \mathbb{C}\setminus T$ şi este soluţia a ecuaţiei lui Bessel pe domeniul $D$.

Se poate verifica uşor că $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ sunt liniar independente.

Intr-adevăr, $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ sunt de forma $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu (a_0 + a_2x^2 + \ldots),\ J_{-\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu (b_0 + b_2x^2 + \ldots)$ cu $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, deci nu există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $J_\nu = \lambda J_{-\nu}$ sau $J_{-\nu} = \lambda J_\nu$. Avem deci următorul rezultat:

**Teorema 11.8.** *Cu convenţia $arg_0(\nu) \in [0,\pi)$, dacă $\nu$ nu este număr natural, atunci soluţia generală a ecuaţiei lui Bessel pe domeniul $D = \mathbb{C}\setminus T$ este*

$$y = aJ_\nu + bJ_{-\nu}$$

*unde $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ sunt funcţiile definite prin (11.21) şi(11.22), iar $a$ şi $b$ sunt constante complexe arbitrare.*

**Cazul 2.** $\nu = n \in \mathbb{N}$. In acest caz, $-2n+2p+1 \neq 0$, $\forall p \in N^*$ şi din relaţiile scrise mai sus, rezultă $c_1 = c_3 = \ldots = c_{2p+1} = \ldots = 0$.

Dacă $\nu = 0$, cele două rădăcini $\nu$ şi $-\nu$ nu sunt distincte, deci nu putem obţine o a doua soluţie pe această cale.

Dacă $\nu = n \in \mathbb{N}^*$, în relaţiile de mai sus de pe prima coloană , coeficientul lui $c_{2n}$ este nul şi rezultă $c_{2n-2} = c_{2n-4} = \ldots = c_0 = 0$, fapt ce contrazice ipoteza $c_0 \neq 0$, deci nu putem avea o a doua soluţie de forma (11.15) liniar independentă faţă de prima. De altfel, considerând în continuare relaţiile de pe prima coloană pentru $p = n+1, n+2, \ldots$ obţinem o soluţie de forma (11.15), care diferă de soluţia $J_n$ printr-un factor constant.

Evident, pentru $\nu = n$, (11.21) devine

$$J_n = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \tag{11.23}$$

deoarece $\Gamma(n+p+1) = (n+p)!$.

In acest caz va trebui să căutăm o a doua soluţie particulară a ecuaţiei lui Bessel pe altă cale.

**Teorema 11.9.** *Fie $J_n$ şi $J_{-n}$ funcţiile obţinute din (11.21) şi (11.22) pentru $\nu = n$. Intre aceste funcţii există relaţia*

$$J_{-n} = (-1)^n J_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11.24}$$

*Demonstraţie.* Avem $J_{-n}(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(-n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2p}$. Cum $\frac{1}{\Gamma(-n+p+1)} = 0$ pentru $-n+p+1 = 0, -1, -2\ldots$, adică pentru $p = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ (deoarece $p \geq 0$). Rămâne $J_{-n}(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(-n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2p}$ sau cu schimbarea $p = n+q$ a indicelui de însumare,

$$J_{-n}(x) = \sum_{q\geq 0} \frac{(-1)^{n+q}}{(n+q)!\Gamma(q+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q} = (-1)^n \sum_{q\geq 0} \frac{(-1)^q}{q!(n+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}$$

Comparând cu (11.23) rezultă (11.24). □

**Teorema 11.10.** *Wronskianul funcţiilor $J_\nu$, $J_{-\nu}$ are valorile*

$$w(x) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = -\frac{\sin \nu\pi}{\pi x} \tag{11.25}$$

*Demonstraţie.* Pornim de la faptul că $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ sunt soluţii ale ecuaţiei lui Bessel (11.13), deci

$$x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0$$

$$x^2 J''_{-\nu}(x) + x J'_{-\nu}(x) + (x^2 - \nu^2) J_{-\nu}(x) = 0$$

Inmulţim prima egalitate cu $-J_{-\nu}(x)$, iar a doua cu $J_\nu$ şi adunăm :

$$x^2(J_\nu(x)J''_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J''_\nu(x)) + x(J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x)) = 0$$

Am obţinut $xw' + w = 0$. Rezultă $w(x) = \frac{k}{x}$, unde $k$ este o constantă complexă pe care o vom determina din calcul direct. Conform (11.21) şi (11.22),

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \ldots, \ \ J_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \ldots$$

$$J'_\nu(x)=\frac{\nu}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}+\ldots,\ \ J'_{-\nu}(x)=-\frac{\nu}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1}+\ldots$$

In produsele $J_\nu(x)J'_{-\nu}(x)$ şi $J_{-\nu}(x)J'_\nu(x)$, singurii termeni în $\frac{1}{x}$ sunt cei daţi de produsele primilor termeni din dezvoltările de mai sus. Aşadar,

$$w(x)=\frac{-2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)}\cdot\frac{1}{x}.$$

Tinând seama de proprietăţile funcţiei $\Gamma$ rezultă că $w(x)$ are forma din enunţ □

**Corolarul 11.1.** *Funcţiile $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ sunt liniar dependente dacă şi numai dacă $\nu\in\mathbb{N}$.*

Formula (11.25) sugerează să căutăm o nouă soluţie $Y_\nu$, combinaţie liniară a funcţiilor $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ astfel încât wronskianul funcţiilor $J_\nu$ şi $Y_\nu$ să nu mai conţină factorul $\sin\nu\pi$. Evident, $Y_\nu$ de forma

$$Y_\nu=\frac{1}{\sin\nu\pi}[a(\nu)J_\nu(x)+b(\nu)J_{-\nu}(x)]$$

este soluţie a ecuaţiei Bessel, pentru $n$ nenatural, oricare $a(\nu),b(\nu)\in\mathbb{C}$.

Putem alege $a(\nu),b(\nu)$ astfel încât wronskianul funcţiilor $J_\nu$, $Y_\nu$ să nu se anuleze pentru nicio valoare a lui $\nu$, să existe $Y_n=\lim\limits_{\nu\to n}Y_\nu(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi $Y_n$ să fie soluţie a ecuaţiei Bessel pentru $\nu=n$.

**Teorema 11.11.** *Funcţia*

$$Y_\nu=\frac{1}{\sin\nu\pi}(J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)),\ \ \nu\ \ \textit{nenatural} \tag{11.26}$$

*are următoarele proprietăţi :*

1. $W(J_\nu(x),Y_\nu(x))=\begin{vmatrix} J_\nu(x) & Y_\nu(x)\\ J'_\nu(x) & Y'_\nu(x)\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi x},\ \ \forall n\ \ \textit{nenatural}$

2. *cu restricţia $\nu\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ există $Y_n(x)=\lim\limits_{\nu\to n}Y_\nu(x),\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, anume :*

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}-(-1)^\nu\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \tag{11.27}$$

3. *$Y_n$ este soluţie a ecuaţiei lui Bessel pentru $\nu=n,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.*

*Demonstraţie.* 1. Avem

$$W(J_\nu(x),Y_\nu(x))=\frac{1}{\sin\nu\pi}\begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)\\ J'_\nu(x) & J'_\nu(x)\cos\nu\pi-J'_{-\nu}(x)\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{\sin\nu\pi}W(J_\nu(x),J_{-\nu}(x))$$

Comparând cu (11.25) rezultă $W(J_\nu(x), Y_\nu(x)) = \frac{2}{\pi x}$.

2. Restricţia impusă , în calculul limitei, este posibilă , deoarece ne interesează o soluţie particulară $Y_n$ liniar independentă faţă de $J_n$, indiferent pe ce cale o obţinem. Avem

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n, \nu \in [0,\infty)\setminus \mathbb{N}} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} =$$

$$= \lim_{\nu \to n, \nu \in [0,\infty)\setminus \mathbb{N}} \frac{\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\cos\nu\pi - \pi \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\sin\nu\pi - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos \nu\pi}$$

Evident $\cos n\pi = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi am folosit relaţia (11.24). Calculând ultima limită obţinem egalitatea din enunţ .

3. Dacă scriem că $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ sunt soluţii ale ecuaţiei lui Bessel (11.13) şi derivăm în raport cu $\nu$, prin schimbarea ordinei de derivare, obţinem

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) + x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) + (x^2 - \nu^2)\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - 2\nu J_\nu = 0$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) + x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) + (x^2 - \nu^2)\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} - 2\nu J_{-\nu} = 0$$

Inmulţim prima egalitate cu $\frac{1}{\pi}$, a doua cu $-\frac{1}{\pi}(-1)^\nu$ şi adunăm. Obţinem

$$x^2 U_\nu'' + xU_\nu' + (x^2 - \nu^2)U_\nu - \frac{2\nu}{\pi}(J_\nu - (-1)^\nu J_{-\nu}) = 0$$

Am notat $U_\nu = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)$. Trecând la limită pentru $\nu \longrightarrow n$ şi ţinând seama de (11.27) şi (11.24), obţinem

$$x^2 Y_n'' + xY_n' + (x^2 - n^2)Y_n = 0,$$

deci $Y_n$ este soluţie a ecuaţiei lui Bessel pentru $\nu = n \in \mathbb{N}$ arbitrar. □

**Definiţia 11.6.** Funcţiile $J_\nu$ şi $J_{-\nu}$ definite pentru $\nu = 0$ şi pentru orice $\nu$ cu $\arg_0(\nu) \in [0, \pi)$ prin (11.21) şi (11.22) se numesc **funcţiile lui Bessel de prima speţă şi de ordinul $\nu$, respectiv $-\nu$.** Funcţia $Y_\nu$ definită de (11.26) pentru $\nu$ număr nenatural şi prin (11.27) pentru $\nu = n \in \mathbb{N}$ se numeşte **funcţia lui Bessel de speţa a doua şi de ordinul $\nu$.**

**Corolarul 11.2.** *Soluţia generală a ecuaţiei lui Bessel (11.13) se poate scrie sub forma $y = aJ_\nu + bY_\nu$ cu $a, b$ constante complexe arbitrare.*

**Observaţia 11.4.** In aplicaţii se întâlnesc combinaţiile liniare particulare

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + \mathrm{i}Y_\nu, \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu - \mathrm{i}Y_\nu$$

numite **funcţiile lui Bessel de speţa a treia** sau **funcţiile lui Hankel**.

Pentru $\nu$ nenatural aceste funcţii pot fi exprimate numai prin funcţiile lui Bessel de prima speţă :

$$H_\nu^{(1)} = \mathrm{i}\frac{J_\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi} - J_{-\nu}}{\sin\nu\pi},\ \ H_\nu^{(2)} = -\mathrm{i}\frac{J_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi} - J_{-\nu}}{\sin\nu\pi}$$

Schimbând pe $\nu$ cu $-\nu$ se obţin relaţiile

$$H_{-\nu}^{(1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi} H_\nu^{(1)},\ \ H_{-\nu}^{(2)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi} H_\nu^{(2)}$$

### 11.2.2 Relaţii de recurenţă

**Teorema 11.12.** *Intre funcţiile lui Bessel de prima speţă şi derivatele lor, există următoarele relaţii de recurenţă :*

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x),\ \ \frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^\nu J_{\nu+1}(x) \tag{11.28}$$

*sau echivalent cu acestea*

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

*Demonstraţie.* Seria (11.21) poate fi derivată termen cu termen pe domeniul de olomorfie al funcţiei $J_\nu$, deci

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p 2^\nu}{p!\Gamma(\nu+p+1)} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2p} =$$

$$= \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p 2^\nu(\nu+p)}{p!\Gamma(\nu+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2p-1} = x^\nu \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2p} = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

Analog,

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p 2^{-\nu}}{p!\Gamma(\nu+p+1)} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p 2^{-\nu} p}{p!\Gamma(\nu+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-1}$$

Termenul corespunzător lui $p = 0$ este nul, deoarece este derivata unei constante. Simplificăm cu $p$ în expresia termenului general şi schimbăm indicele de însumare $p$ în $q+1$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = \sum_{q\geq 0} \frac{(-1)^{q+1} 2^{-\nu}}{q!\Gamma(\nu+q+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2q+1} = -x^{-\nu} \sum_{q\geq 0} \frac{(-1)^p}{q!\Gamma(\nu+1+q+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2q}$$

deci şi a doua relaţie (11.28) este demonstrată .

Efectuăm operaţiile de derivare în (11.28)

$$\nu x^{\nu-1}J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$-\nu x^{\nu-1}J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = -x^\nu J_{\nu+1}(x)$$

Inmulţim prima egalitate cu $x^{-\nu}$ şi cea de-a doua cu $x^\nu$. Obţinem

$$\frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x)$$

$$-\frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x)$$

Din acestea rezultă celelalte relaţii din enunţ . □

**Observaţia 11.5.** Relaţiile de recurenţă (11.28) sunt satisfăcute şi de funcţiile de speţa a doua $Y_\nu$.

**Teorema 11.13.** *Funcţiile lui Bessel $J_\nu$, pentru $\nu = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, pot fi exprimate prin funcţii elementare*

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[A_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos x + B_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin x\right] \tag{11.29}$$

*unde $A_n$ şi $B_n$ sunt polinoame de grad cel mult $n$.*

*Demonstraţie.* Conform formulei (11.21), $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma\left(\frac{1}{2}+p+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2p}$.

Avem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+p+1\right) = \left(\frac{1}{2}+p\right)\left(\frac{1}{2}+p-1\right)\ldots\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2p+1)}{2^{p+1}}\sqrt{\pi}$$

sau, amplificând cu $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2p) = p!2^p$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+p+1\right) = \frac{(2p+1)!}{p!2^{2p+1}}\sqrt{\pi}.$$

Astfel,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p 2^{2p+1}}{(2p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

deci

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Folosind proprietatea funcţiei $\Gamma$ : $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$, avem

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}+p+1\right) = \frac{2}{2p+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+p+1\right) = \frac{(2p)!}{p!2^{2p}}\sqrt{\pi}.$$

Se va obţine

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p\geq 0} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

In relaţiile din Teorema 11.12 înlocuim $\nu$ cu $\frac{1}{2}$ şi apoi cu $-\frac{1}{2}$ şi rezultă

$$J_{1+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{1}{x} \sin x - \cos x \right)$$

$$J_{-1-\frac{1}{2}}(x) = -J_{\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( -\sin x - \frac{1}{x} \cos x \right)$$

Cazul general din enunţ se obţinem prin inducţie, folosind relaţiile de recurenţă

□

### 11.2.3 Reprezentări integrale

**Teorema 11.14.** *Funcţiile lui Bessel $J_n$, $n \in \mathbb{N}$ admit următoarea reprezentare*

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}} d\zeta \tag{11.30}$$

*unde $C$ este un cerc cu centrul în origine şi cu raza $\rho > 0$ arbitrară .*

*Demonstraţie.* Funcţia $\zeta \longmapsto f(\zeta, x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}}$, unde $x$ este un parametru cu valori complexe, nu are în $\mathbb{C}$ alte singularităţi decât $\zeta = 0$, punct singular esenţial, $\forall x \forall \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Conform definiţiei reziduului, $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(\zeta, x) d\zeta = \mathrm{Rez}(f, 0)$.

Pentru calculul reziduului, dezvoltăm funcţia $f$ în serie Laurent în jurul originii,

$$f(\zeta, x) = \frac{1}{\zeta^{n+1}} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\zeta} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\frac{1}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta^{n+1}} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^p \zeta^p \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{\zeta^k}$$

Efectuând produsul celor două serii, avem

$$f(\zeta, x) = \sum_{p\geq 0} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{p!k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{p+k} \cdot \frac{1}{\zeta^{n+k-p+1}}.$$

Termenii în $\frac{1}{\zeta}$ se obţin pentru $p = n + k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, deci

$$\mathrm{Rez}(f, 0) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

Comparând cu (11.23), observăm că $\mathrm{Rez}(f, 0) = J_n(x)$ şi formula (11.30) este demonstrată .

In cazul când $x = 0$,

$$f(\zeta, 0) = \frac{1}{\zeta^{n+1}}$$

$$\operatorname{Rez}(f, 0) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = 0 \\ 0, & \text{pentru } n > 0 \end{cases}$$

în concordanţă cu faptul că $J_0(0) = 1$ şi $J_n(0) = 0$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$, aşa cum rezultă din (11.23). □

**Observaţia 11.6.** Considerăm funcţia $\zeta \longmapsto \varphi(\zeta, x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}$, unde $x$ este un parametru cu valori complexe. Ca şi funcţia $f$ de mai sus, $\varphi$ are în $\mathbb{C}$ numai singularitatea $\zeta = 0$, punct singular esenţial, $\forall x \in \mathbb{C}\{0\}$.

Dezvoltarea în serie Laurent în jurul originii are forma

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n \zeta^n, \;\; c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Comparând cu (11.30) avem $c_n = J_n(x), \;\; n \in \mathbb{N}$.

Vom demonstra că $c_n = J_n(x)$ şi pentru $n = -1, -2, -3, \ldots$. Din (11.23) rezultă $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ şi datorită egalităţilor (11.24) şi (11.30) avem

$$J_{-n}(x) = J_n(-x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

In această integrală facem schimbarea de variabilă $\zeta = \frac{1}{z}$ care transformă cercul $C$, cu centrul în origine şi cu raza $\rho$, în cercul $C_1$, cu centrul în origine şi cu raza $\rho_1 = \frac{1}{\rho}$. Deci

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{-n+1}} d\zeta = c_{-n}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.31}$$

deoarece, datorită teoremei lui Cauchy, cercul $C_1$ poate fi înlocuit cu $C$.

Aşadar, avem dezvoltarea în serie Laurent în jurul originii :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} = \sum_{-\infty < n < \infty} J_n(x) \zeta^n \tag{11.32}$$

Pentru acest motiv $\zeta \longmapsto \varphi(\zeta, x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}$ se numeşte **funcţia generatoare** a funcţiilor lui Bessel de prima speţă şi de ordin întreg, notate cu $J_n$.

Egalitatea (11.32) rămâne adevărată şi pentru $x = 0$, deoarece $J_0(0) = 1$ şi $J_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}\{0\}$.

**Teorema 11.15.** *Funcţiile $J_n$, $n \in \mathbb{Z}$ mai pot fi reprezentate prin următoarele integrale :*

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} d\theta \tag{11.33}$$

$$\mathrm{i}^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} d\theta \tag{11.34}$$

*Demonstraţie.* Comparând formula (11.31), valabilă pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ cu (11.30), unde $n \in \mathbb{N}$, putem afirma că egalitatea (11.30) are loc pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

In (11.30) vom lua raza $\rho = 1$. Notând $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, integrala pe $C$ se transformă într-o integrală pe intervalul $[0, 2\pi]$,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} d\theta$$

şi formula (11.33) este demonstrată .

Dacă în (11.33) facem schimbarea de variabilă $\theta = \frac{\pi}{2} - \tau$, rezultă

$$J_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\frac{\pi}{2} - \tau)} d\tau = (-1)^n \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\tau} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau} d\tau$$

Funcţia de sub semnul integral este periodică de perioadă $2\pi$, deci intervalul de integrare $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ poate fi înlocuit cu $[0, 2\pi]$. Inmulţind apoi cu $\mathrm{i}^n$ în ambii membri obţinem egalitatea (11.34). □

**Corolarul 11.3.** *Funcţiile $J_n$, $n \in \mathbb{N}$ admit şi următoarele reprezentări :*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta \tag{11.35}$$

$$\mathrm{i}^n J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta} \cos n\theta d\theta \tag{11.36}$$

*Demonstraţie.* In (11.33) şi (11.34), funcţiile de sub semnul integral au perioada $2\pi$, deci intervalul de integrare $[0, 2\pi]$ poate fi înlocuit cu $[-\pi, \pi]$. In (11.33) avem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin\theta - n\theta)}$, deci

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta) d\theta.$$

Sub semnul integral avem în primul termen o funcţie pară în raport cu $\theta$, în al doilea o funcţie impară , deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta = 2\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta) d\theta = 0$$

şi formula (11.35) este demonstrată . Egalitatea (11.36) se obţine analog din (11.34). □

### 11.2.4 Funcţiile lui Bessel modificate

In diverse probleme de fizică şi tehnică se întâlneşte ecuaţia lui Bessel sub forma

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0, \ \ \nu \in \mathbb{R}. \tag{11.37}$$

Cu schimbarea de variabilă $\xi = \mathrm{i}x$, ecuaţia (11.37) va avea forma canonică

$$\xi^2\eta'' + \xi\eta' - (\xi^2 - \nu^2)\eta = 0, \tag{11.38}$$

unde $\eta(\mathrm{i}x) = y(x)$.

Conform Corolarului 11.2, soluţia generală a ecuaţiei (11.38) are forma

$$\eta(\xi) = aJ_\nu(\xi) + bY_\nu(\xi)$$

cu $a$ şi $b$ constante complexe arbitrare, deci ecuaţia (11.37) va avea soluţia generală

$$y(x) = aJ_\nu(\mathrm{i}x) + bY_\nu(\mathrm{i}x).$$

Inlocuind în (11.21) pe $x$ cu $\mathrm{i}x$, obţinem

$$J_\nu(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}^\nu \sum_{p\geq 0}(-1)^k \frac{1}{p!\Gamma(\nu + p + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2p}.$$

Observăm că

$$I_\nu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\frac{\pi}{2}} J_\nu(\mathrm{i}x) = \sum_{p\geq 0}(-1)^k \frac{1}{p!\Gamma(\nu + p + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2p} \tag{11.39}$$

ia valori reale pentru $\nu \in \mathbb{R}$. Funcţia $I_\nu$ este soluţie a ecuaţiei (11.37).

Dacă $\nu$ nu este număr natural, o a doua soluţie particulară a ecuaţiei (11.37), liniar independentă faţă de prima, se obţine analog din $J_\nu(\mathrm{i}x)$ sau direct din (11.39) schimbând $\nu$ cu $-\nu$. In acest caz soluţia generală a ecuaţiei (11.37) se poate scrie sub forma

$$y(x) = aI_\nu(x) + bI_{-\nu}(x)$$

cu $a, b$ constante reale arbitrare (în ipoteza $\nu \in \mathbb{R}, \ \ x \in \mathbb{R}$).

Dacă $\nu \in N$, datorită relaţiilor

$$J_n(\mathrm{i}x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} I_n(x), \ \ J_{-n}(\mathrm{i}x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} I_{-n}(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

(11.24) devine

$$I_{-n} = I_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11.40}$$

Pentru a construi soluţia generală a ecuaţiei (11.37), în ipoteza $\nu \in N$, se consideră funcţia $K_\nu$, de valori

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}, \ \ \nu \in [0, \infty) \setminus \mathbb{N} \tag{11.41}$$

care împreună cu $I_\nu$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (11.37), $\forall \nu \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}$. Dacă $\nu = n \in \mathbb{N}$, $K_\nu$ se înlocuieşte cu funcţia $K_n$, definită prin

$$K_n(x) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(x) = \frac{1}{2}(-1)^n \left[ \frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}. \tag{11.42}$$

**Definiţia 11.7.** Funcţiile $I_\nu, I_{-\nu}$ având valorile

$$I_\nu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\frac{\pi}{2}} J_\nu(\mathrm{i}x), \;\; I_{-\nu}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\frac{\pi}{2}} J_{-\nu}(\mathrm{i}x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ cu $\nu \in [0,\infty)$ se numesc **funcţiile lui Bessel de prima speţă modificate**.

Funcţiile $K_\nu$ definite prin (11.41) şi (11.42) se numesc **funcţiile lui Bessel de speţa a doua modificate**.

Funcţiile lui Bessel modificate se mai numesc şi **funcţii Bessel de argument pur imaginar**.

Rezultatele obţinute pot fi formulate astfel :

**Teorema 11.16.** *Soluţia generală a ecuaţiei (11.37) cu $\nu \in [0,\infty)$ poate fi scrisă sub forma*

$$y(x) = aI_\nu(x) + bK_\nu(x),$$

*unde $I_\nu$ şi $K_\nu$ sunt funcţiile lui Bessel modificate de prima speţă , respectiv de speţa a doua, iar $a, b$ sunt constante reale arbitrare.*

**Observaţia 11.7.** In electrotehnică se întâlneşte funcţia de valori

$$I_0(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \sum_{p\geq 0} \mathrm{i}^p \frac{1}{(p!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Punând în evidenţă partea reală şi partea imaginară se obţin **funcţiile lui Thomson (Lord Kelvin)**, notate ber, bei (se citeşte bessel-real, respectiv bessel-imaginar),

$$\mathrm{ber}(x) = 1 - \frac{1}{(2!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^8 + \dots$$

$$\mathrm{bei}(x) = \frac{1}{(1!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{1}{(5!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{10} + \dots$$

Analog se definesc funcţiile ker şi kei (kelvin-real, kelvin-imaginar)

$$K_0(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \mathrm{ker}(x) + \mathrm{ikei}(x).$$

**Exemplul 11.5.** Să se dezvolte în serie Fourier în raport cu $\theta$ funcţiile $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}, \cos(x\sin\theta), \sin(x\sin\theta)$.

*Demonstraţie.* Vom dezvolta în serii de puteri ale lui $t$ funcţia

$$e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}} = e^{\frac{xt}{2}} e^{\frac{x}{2t}} = \left[1 + \frac{xt}{2} + \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^3}{3!} + \dots\right] \cdot \left[1 - \frac{x}{2t} + \frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^3}{3!} + \dots\right] =$$

$$= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots + c_{-1} t^{-1} + c_{-2} t^{-2} + c_{-3} t^{-3} + \dots$$

Fiecare dintre coeficienţii $c_n$ este o serie infinită

$$c_n = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!(n+2)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+6}}{3!(n+3)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Deci $c_n = J_n(x)$. Aşadar,

$$e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}} = J_0(x) + tJ_1(x) + t^2 J_2(x) + t^3 J_3(x) + \dots + t^{-1} J_{-1}(x) + t^{-2} J_{-2}(x) + t^{-3} J_{-3}(x) + \dots =$$

$$= J_0(x) + J_1(x)(t - t^{-1}) + J_2(x)(t^2 - t^{-2}) + \dots .$$

Fie $t = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Atunci

$$t^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$t^{-2} = \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Avem $e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}} = e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = e^{ix\sin\theta}$, deci

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2[J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \dots] + 2i[J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + \dots]$$

sau

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} [J_{2k}(x)\cos 2k\theta + iJ_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta]. \qquad (11.43)$$

Pentru a dezvolta celelalte funcţii observăm că

$$e^{ix\sin\theta} = \cos(x\sin x) + i\sin(x\sin x)$$

deci

$$\cos(x\sin x) + i\sin(x\sin x) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} [J_{2k}(x)\cos 2k\theta + iJ_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta]$$

Egalând părţile reale şi cele imaginare obţinem

$$\cos(x\sin x) = J_0(x) + 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(x)\cos 2k\theta$$

$$\sin(x\sin x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta$$

Dacă în (11.43) înlocuim $\theta$ cu $\frac{\pi}{2} - \theta$ obţinem

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta} = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{i}^k \cos kx,$$

de unde rezultă

$$\cos(x\cos x) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x)\cos 2k\theta$$

$$\sin(x\cos x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\theta$$

□

**Exemplul 11.6.** Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y'' + (1-2\nu)xy' + \nu^2(x^{2\nu} + 1 - \nu^2)y = 0.$$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de variabilă $x = t^\alpha$, urmând ca $\alpha$ să fie determinat convenabil astfel încât ecuaţia să se reducă la o ecuaţie Bessel.

Avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot t^{1-\alpha}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha}\cdot t^{1-\alpha}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\cdot t^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)t^{-\alpha}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\alpha}t^{1-\alpha}\frac{d^2y}{dt^2}\right]\left(\frac{1}{\alpha}t^{1-\alpha}\right)$$

Ecuaţia devine

$$t^{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)t^{-\alpha}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\alpha}t^{1-\alpha}\frac{d^2y}{dt^2}\right]\left(\frac{1}{\alpha}t^{1-\alpha}\right) + (1-2\nu)t^\alpha\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot t^{1-\alpha} +$$

$$+\nu^2(t^{2\nu\alpha} + 1 - \nu^2)y = 0$$

sau

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + (1-2\nu\alpha)t\frac{dy}{dt} + \alpha^2\nu^2(t^{2\nu\alpha} + 1 - \nu^2)y = 0$$

Vom lua $\alpha = \frac{1}{\nu}$ pentru a avea $t^2$ în ultima paranteză . Ecuaţia se scrie

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + (t^2 + 1 - \nu^2)y = 0. \tag{11.44}$$

Vom face schimbarea de funcţie $y = t^\beta \cdot z(t)$, iar $\beta$ va fi determinat din condiţia ca coeficientul lui $t\frac{dy}{dt}$ să fie 1.

Avem

$$\frac{dy}{dt} = \beta t^{\beta-1} z + t^\beta \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta(\beta-1)t^{\beta-2}z + \beta t^{\beta-1}\frac{dz}{dt} + \beta t^{\beta-1}\frac{dz}{dt} + t^\beta \frac{d^2z}{dt^2}$$

Inlocuind în ecuaţia (11.44) şi simplificând cu $t^\beta$ obţinem ecuaţia

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + (2\beta-1)t\frac{dz}{dt} + z(\beta^2 - 2\beta + 1 + t^2 - \nu^2) = 0$$

Din condiţia $2\beta - 1 = 1$, rezultă $\beta = 1$, iar ecuaţia este

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + z(t^2 - \nu^2) = 0.$$

Această ultimă ecuaţie este forma canonică a ecuaţiei Bessel, deci soluţia ei este $z(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei date este $y(x) = x^\nu[c_1 J_\nu(x^\nu) + c_2 Y_\nu(x^\nu)]$. □

**Exemplul 11.7.** Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$xy'' - 2py' - cxy = 0.$$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de funcţie $y(x) = x^\alpha z(x)$. Avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} z(x) + x^\alpha \frac{dz}{dx}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z + 2\alpha x^{\alpha-1}\frac{dz}{dx} + x^\alpha \frac{d^2z}{dx^2}$$

Ecuaţia devine

$$x^2 z'' + (2\alpha - 2p)xz' + (\alpha^2 - \alpha - 2p\alpha - cx^2)z = 0.$$

Vom lua $2\alpha - 2p = 1$ pentru ca $xz'$ să aibă coeficientul 1, deci $\alpha = p + \frac{1}{2}$ şi ecuaţia se scrie

$$x^2 z'' + xz' + \left[(\mathrm{i}\sqrt{c}x)^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2\right] z = 0.$$

Dacă în ultima ecuaţie se face schimbarea de variabilă $\mathrm{i}\sqrt{cx} = t$, se obţine ecuaţia

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + \left[t^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2\right] z = 0.$$

Ecuaţia a fost adusă la formna canonică Bessel cu $\nu^2 = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2$, iar soluţia esi este

$$y = x^{p+\frac{1}{2}}\left[c_1 J_{p+\frac{1}{2}}(\mathrm{i}\sqrt{c}x) + c_2 Y_{p+\frac{1}{2}}(\mathrm{i}\sqrt{c}x)\right].$$

□

**Exemplul 11.8.** Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y'' + (x+2)x^2\operatorname{ctg} xy' + (x\operatorname{ctg} x - \nu^2)y = 0.$$

*Demonstraţie.* Facem schimbarea de funcţie $y(x) = \frac{1}{\sin x}z(x)$. Avem

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin x}z + \frac{1}{\sin x}z'$$

$$y'' = \frac{1}{\sin x}z'' - 2\frac{\cos x}{\sin x}z' + \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}z$$

Astfel ecuaţia devine :

$$x^2z'' + xz' + (x^2 - \nu^2)z = 0$$

şi are soluţia $z(x) = c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)$. Deci $y(x) = \frac{1}{\sin x}[c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)]$. □

# Bibliografie


[1] Th. Angheluţă , *Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă* Ed. Tehnică , Bucureşti, 1957 .

[2] A. Angot, *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică şi din telecomunicaţii*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1966.

[3] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară . Geometrie analitică , diferenţială . Ecuaţii diferenţiale. Culegere de probleme*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[4] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[5] V. Brânzănescu, O. Stănăşilă , *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicaţii*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[6] P. Cocârlan, M. Roşculeţ , *Serii trigonometrice şi aplicaţii*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1991.

[7] Mariana Craiu, M.N. Roşculeţ , *Ecuaţii diferenţiale aplicative. Probleme de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I*, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1971.

[8] Tania-Luminiţa Costache, Gh. Oprişan, *Transformări integrale*, Editura Printech, Bucureşti, 2004.

[9] Tania-Luminiţa Costache, *Analiză matematică . Noţiuni teoretice. Aplicaţii*, Editura Printech, Bucureşti, 2006.

[10] Tania-Luminiţa Costache, *Matematici speciale. Culegere de probleme*, Editura Printech, Bucureşti, 2008.

[11] V. Ditkine, A. Proudnikov, *Transformations intégrales et calcul opérationnel*, Editions MIR-Moscou, 1978.

[12] G. M. Fihtenholţ , *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică Bucureşti, 1965.

[13] A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1972.

[14] D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, editia a doua, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti.

[15] D. V. Ionescu, C. Kalik, *Ecuaţii diferenţiale ordinare şi cu derivate parţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1965.

[16] O. Kreindler, *Curs de matematici superioare*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1956.

[17] Ioana Luca, Gh. Oprişan, *Matematici avansate*, Editura Printech, Bucureşti, 2001.

[18] Gh. Marinescu, *Teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1963.

[19] O. Mayer, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă* , vol.1, Ed. academiei R.S.R., Bucureşti, 1981.

[20] Gh. Micula, Paraschiva Pavel, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1989.

[21] Gh. Mocică , *Probleme de funcţii speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1988.

[22] G. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[23] Luminiţa Lemnete-Ninulescu, Alina Niţă , Ana Niţă , *Matematici speciale. Teorie. Exemple. Probleme rezolvate* , Editura Printech, Bucureşti, 2006.

[24] S. Nistor, I. Tofan, *Introducere în teoria funcţiilor complexe*, Ed. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, 1997.

[25] Alina Niţă , Tania-Luminiţa Costache, Raluca Dumitrescu, *Matematici speciale. Noţiuni teoretice. Aplicaţii.*, Editura Printech, Bucureşti, 2007.

[26] V. Olariu, Tatiana Stănăşilă , *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1982.

[27] V. Olariu, V. Prepeliţă , *Teoria distribuţiilor. Funcţii complexe şi aplicaţii*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică , Bucureşti, 1986.

[28] M. Olteanu, *Analiză matematică . Noţiuni teoretice şi probleme rezolvate*, Editura Printech, Bucureşti, 2004.

[29] A. Papoulis, *The Fourier integral and its applications*, McGraw Hill Book Co., New York, 1962.

[30] Garofiţa Pavel, Floare Tomuţa, I. Gavrea, *Matematici speciale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981.

[31] E. Rogai, *Exerciţii si probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1965.

[32] V. Rudner, *Probleme de matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1970.

[33] I. A. Rus, Paraschiva Pavel, *Ecuaţii diferenţiale*, Ediţia a doua, Editura Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1982.

[34] V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare II*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1954.

[35] V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare III. Partea II*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1955.

[36] D. Stanomir, O. Stănăşilă, *Metode matematice în teoria semnalelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[37] V. V. Stepanov, *Curs de ecuaţii diferenţiale*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1955.

[38] M. Stoka, *Culegere de probleme de funcţii complexe*, Ed. Tehnică , Bucureşti, 1965.

[39] M. Stoka, *Funcţii de variabilă reală şi funcţii de variabilă complexă* , Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1964.

[40] R. D. Stuart, *Introducere în analiza Fourier cu aplicaţii în tehnică* , Editura Tehnică , Bucureşti, 1971.

[41] I. Gh. Şabac, *Matematici Speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti, 1981.

[42] N. Teodorescu, V. Olariu, *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, vol. II, Editura Tehnică , Bucureşti, 1979.

[43] Rodica Trandafir, *Probleme de matematici pentru ingineri*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1977.

[44] C. Tudosie, *Probleme de ecuaţii diferenţiale*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1990.

[45] S. Turbatu, *Funcţii complexe de variabilă complexă* , Universitatea Bucureşti, Facultatea de Fizică , 1980.

[46] N. Wiener, *Integrala Fourier şi unele aplicaţii*, Gosudarstvennoe Izd., Moskva, 1963.